

1. (устно) В треугольнике ABC

$\angle B = 20^\circ$, $\angle C = 40^\circ$. Докажите, что

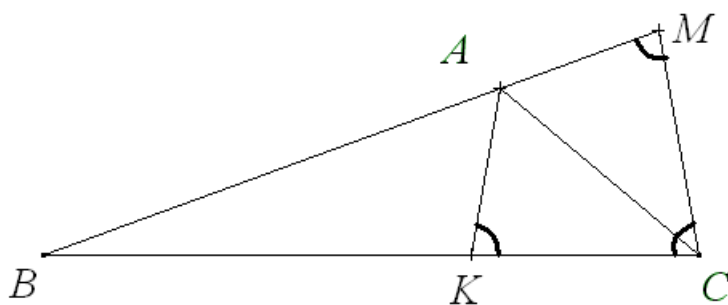
сумма длин биссектрисы AK и стороны AB равна длине стороны BC .

(Отметим за точкой A на луче BA точку M так, что $BM = BC$.

Пользуясь равнобедренностью треугольника BMC и

биссектрисой AK угла BAC ,

посчитаем углы и докажем, что треугольники ACK и SAM равны, следовательно, $MA = AK$ и $AK + AB = MA + AB = MB = BC$.)



2. (ответ) На олимпиаде были даны три задачи А, В и С. 25 школьников решили хотя

бы одну задачу. Среди школьников, не решивших задачу А, решивших В, в два

раза больше, чем решивших С. Школьников, решивших только задачу А, на одного

больше, чем остальных школьников, решивших задачу А. Сколько школьников

решили только задачу В, если среди школьников, решивших только одну задачу,

половина не решила задачу А? (6 человек. Пусть a, b, c – количества школьников, решивших по одной задаче (А, В и С соответственно); x, y, z – количества

школьников, решивших ровно по две задачи (не решивших А, В и С соответственно); t – количество школьников, решивших все три задачи. Тогда по ус-

ловию получим систему из четырёх уравнений: $a + b + c + x + y + z + t = 25$, $b + x = 2(c + x)$,

$a = y + z + t + 1$, $a = b + c$. Из этой системы получим, что $b = 2c + x$ и $4b + c = 26$. Значит,

$c \equiv 2 \pmod{4}$ и по крайней мере в два раза меньше b . Тогда $c = 2$, $b = 6$.)

3. (письменно) В одной из двух банок литр воды, другая пуста. Из первой банки во

вторую переливают половину имеющейся там воды, затем из второй в первую —

треть имеющейся там воды, потом из первой во вторую — четверть имеющейся

там воды и т.д. Сколько воды будет в первой банке после 2011 переливаний? (0,5

литра. Вначале во второй банке оказывается ровно 0,5л, затем из неё отлива-

ют $(1/n)$ столько же, сколько затем вольют обратно $(1/(n+1))$ часть от $(n+1)/n$,

т.е. после каждого нечётного по номеру переливания в обеих банках будет по

0,5 л.)

4. (ответ+пример) В клетках квадрата 3×3 расставляются все целые числа

от 1 до 9. Рассматриваются все пары соседних по стороне чисел. В каком

2	8	9
4	6	3
1	5	7

наименьшем количестве таких пар оба числа взаимно просты? Приведите

ответ и пример с указанием всех нужных пар. (6 пар взаимно простых

чисел. Всего существует два множества не взаимно простых чисел – кратные 2

(2, 4, 6, 8) и кратные 3 (3, 6, 9). Числа первого множества могут нам дать мак-

симум 4 пары не взаимно простых (если стоят по кругу в квадрате 2×2), числа

второго множества дадут нам максимум две таких пары (т.к. все трое не могут

между собой соседствовать). Значит, не более $4 + 2 = 6$ пар не взаимно простых и

не менее $12 - 6 = 6$ пар взаимно простых чисел. Пример на 6 таких пар см. на

рис. – перегородки между числами таких пар жирно выделены.)

5. (письменно) Квадрат разрезали 18 прямыми, из которых 9 параллельны одной сто-

роне квадрата, а 9 – другой, на 100 прямоугольников. Оказалось, что ровно девять

из них – квадраты. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных между

собой. (Если среди этих девяти квадратов нет двух квадратов одинакового размера, то они все лежат в разных столбцах и в разных строках, на которые разбили прямыми исходный квадрат. Но тогда прямоугольник, лежащий на пересечении десятой строки и десятого столбца (не содержащих эти девять квадратов) – тоже квадрат, длина стороны которого равна длине исходного квадрата за вычетом суммы длин девяти получившихся квадратов. Получаем противоречие, значит, есть равные квадраты.)

6. (письменно) На шахматную доску поставили 4 короля, не бьющих друг друга. Какое наибольшее количество королей ещё можно гарантированно поставить на доску так, чтобы все поставленные короли не били друг друга? (7 королей. Приведём контрпример, когда более 7 дополнительных королей поставить нельзя. По-

ставим королей на клетки $b2, b5, e2$ и $e5$ (см. рис.1), тогда они побьют зону в виде квадрата 6×6 , за пределами которой оставшиеся доступные для других королей поля разбиваются только на 7 квадратов 2×2 , в каждый из которых можно

8		к		к		к		к
7								
6								к
5		к			к			
4								к
3								
2		к			к			к
1								
	a	b	c	d	e	f	g	h

рис. 1

8	1	2	1	2	1	2	1	2
7	4	3	4	3	4	3	4	3
6	1	2	1	2	1	2	1	2
5	4	3	4	3	4	3	4	3
4	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3
2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	4	3	4	3	4	3	4	3
	a	b	c	d	e	f	g	h

рис. 2

поставить не более 1 короля. Значит, на доску можно будет дополнительно поставить не более 7 королей. Докажем теперь, что при любой начальной расстановке 4 королей на доску всегда можно поставить ещё хотя бы 7 королей. Заметим, что каждый из 4 поставленных королей сделал запретными для постановки других королей не более 9 клеток в виде квадрата 3×3 вокруг себя. Значит, 4 короля делают запретными не более $4 \cdot 9 = 36$ клеток, и не менее $64 - 36 = 28$ клеток являются доступными для постановки дополнительных королей. Раскрасим всё поле в четыре цвета квадратами 2×2 (см. рис. 2). Тогда по принципу Дирихле из 28 доступных клеток не менее 7 будут одного из цветов. Поставим королей на все доступные клетки этого цвета. Эти поставленные короли (не менее 7 штук) вместе с 4-мя уже стоящими образуют набор королей, не бьющих друг друга.)

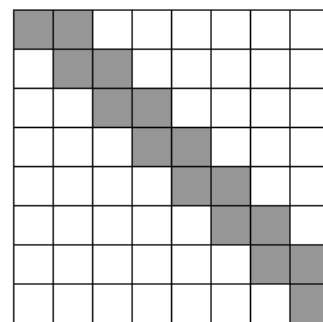
7. (письменно) Каково наибольшее количество последовательных натуральных чисел таких, что у каждого из них ровно четыре натуральных делителя? (3, например, 33, 34, 35. Если бы таких чисел было не менее четырёх, тогда среди них было бы число, кратное 4. Но оно имело бы четыре делителя только тогда, когда равнялось бы 8, а рядом с 8 нет нужных чисел с 4 натуральными делителями.)
8. (устно) На плоскости даны несколько прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Докажите, что все точки пересечения этих прямых можно так раскрасить в три цвета, чтобы две окрашенные точки одной прямой, между которыми нет других окрашенных точек, всегда были разного цвета. (Возьмём вспомогательную прямую l , не параллельную ни одной из прямых, соединяющих точки пересечения данных прямых, так, чтобы все точки пересечения данных прямых лежали с одной стороны от нее. Пронумеруем точки пересечения дан-

ных прямых в порядке их удаленности от прямой l : ближайшей присвоим номер 1, второй по удалённости – номер 2 и т.д. Покрасим первую точку в любой из трёх цветов, а затем будем красить остальные точки в порядке возрастания их номеров, следя за тем, чтобы очередная точка не была покрашена в тот же цвет, что какая-нибудь из уже окрашенных соседних с ней (на одной из данных прямых) точек. Из способа нумерации точек следует, что на каждой из данных прямых точки пересечения её с другими данными идут в порядке возрастания номеров. Поскольку в каждой такой точке пересекаются только две прямые, каждая точка в момент её окраски соседствует не более чем с двумя уже окрашенными. Поэтому мы всегда сможем покрасить её с соблюдением условия задачи.)

9. (письменно) Можно ли расставить по кругу все натуральные числа от 1 до 2010 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была равна простому числу? (**1 решение:** Воспользуемся тем, что числа 2027 и 2029 – простые. Начнём по кругу ставить все числа от 17 до 2010 так, чтобы пара соседей давала в сумме 2027 и 2029, а в конце поставим числа от 1 до 16 с соблюдением условия: 17, 2010, 19, 2008, 21, 2006, 23, 2004, ..., 2007, 20, 2009, 18, 1, 12, 5, 2, 3, 4, 7, 10, 9, 8, 11, 6, 13, 16, 15, 14. **2 решение:** Воспользуемся тем, что числа 2011 и 2017 – простые. Разобьём числа на три группы по модулю 6 (остатки 1 и 3, остатки 5 и 2, остатки 3 и 4), где в каждой группе соседи в сумме дают 2011 или 2017. На стыках групп стоят маленькие числа, которые также в парах в сумме дают простые числа: (1, 2010, 7, 2004, 13, 1998, ..., 2005, 6), (5, 2006, 11, 2000, 17, 1994, ..., 2009, 2), (3, 2008, 9, 2002, ..., 2007, 4).)

10. (устно) На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли соответственно точки E и D такие, что $AP=2 \cdot PD$, $CP=2 \cdot PE$, где P – точка пересечения отрезков AD и CE . Доказать, что AD и CE – медианы треугольника ABC . (Из теоремы Фалеса следует, что точка P лежит на прямых, параллельных сторонам BC и AB , делящих каждую пару смежных с ними сторон в отношении 2:1 от вершин A и C соответственно. Но такая точка единственная и является точкой пересечения медиан, значит, AD и CE – медианы треугольника ABC .)

11. (устно) Дан квадрат 8×8 . Назовём множество его клеток **чётным**, если в любом столбце и в любой строке лежит чётное число (возможно, 0) клеток этого множества. Найдите минимальное натуральное число k такое, что у любого множества из k клеток найдётся непустое чётное подмножество. (16. Если клеток будет меньше 16, то в качестве контрпримера можно привести соответствующий начальный кусок закрашенной на рисунке ломаной. Тогда в любом чётном подмножестве не должно быть первой клетки, затем второй и т.д., т.е. чётное подмножество будет пустым – противоречие. Докажем, что в любом множестве из 16 клеток найдётся непустое чётное подмножество. Рассмотрим двудольный граф, в котором строки и столбцы являются вершинами двух долей (по 8 вершин), а клетки рассматриваемого множества – рёбра этого графа, соединяющие соответствующие вершину-строку и вершину-столбец, в которых находится клетка-ребро. Т.к. количество рёбер (16) равно количеству вершин, то этот граф не является деревом или лесом, значит, в нём есть цикл, который и даст нам нужное непустое чётное подмножество.)

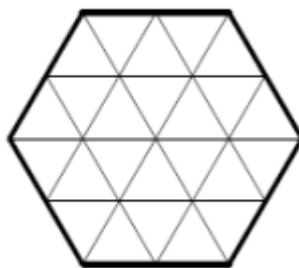


12. (ответ) В автобусе ехали взрослые и дети, причём число взрослых относилось к числу детей как 2:3. После того, как четыре пассажира вышли (и никто не вошёл), число взрослых стало относиться к числу детей как 3:4. Сколько пассажиров первоначально ехало в автобусе, если известно, что их было меньше 60? **(25 пассажиров. Пусть первоначально в автобусе ехали $2a$ взрослых и $3a$ детей, где a – натуральное число. Тогда всего в автобусе было $5a$ пассажиров. После того, как четверо вышли, в автобусе осталось $3b$ взрослых и $4b$ детей – всего $7b$ человек, где b – натуральное число. Получаем уравнение $5a=7b+4$, которое надо решить при условии, что $5a<60$. Иными словами, надо найти такое натуральное число b , что число $7b+4$ делится на 5 и меньше 60. Из условия $7b+4<60$ получаем, что $b<8$. Перебирая теперь $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, находим, что единственным подходящим вариантом является $b=3$. Поэтому в автобусе первоначально ехали $7 \cdot 3 + 4 = 25$ пассажиров.)**

13. (письменно) a, b, c – такие натуральные числа, что $ab+2b+4$ и $bc+2c+4$ делятся на 2010. Докажите, что тогда и число $ca+2a+4$ тоже делится на 2010. (Число $c(ab+2b+4)-2(bc+2c+4)=abc-8=b(ca+2a+4)-2(ab+2b+4)$ делится на 2010, тогда и число $b(ca+2a+4)$ делится на 2010. Число b взаимно просто с числом 2010 (это видно из 1-го условия), значит, на 2010 делится число $ca+2a+4$. Комментарий: На самом деле перед нами неверное рассуждение, правильным решением задачи является указание на некорректность условия с приведением контр-примера. Например, при $a=1001, b=2, c=2009$ числа $ab+2b+4=2010$ и $bc+2c+4=8040$ удовлетворяют условию, а нечётное число $ca+2a+4$ не делится на 2010. Верным является только наличие делимости на 1005.)

14. (ответ+пример) Расстоянием между двумя клетками шахматной доски назовём минимальное число ходов в пути коня между этими клетками. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на доске так, чтобы расстояние между любыми двумя отмеченными клетками было равно 2? Приведите ответ и пример. **(8 клеток, на которые конь может попасть из одной клетки)**

15. (письменно) Можно ли в разбитом на треугольные клетки правильном шестиугольнике (см. рис.) закрасить несколько клеток так, чтобы у каждой незакрашенной (белой) клетки были ровно две закрашенные (чёрные) соседки (по стороне), а у каждой чёрной клетки были ровно две белые соседки? **(можно, см. пример)**



16. (ответ) Решите систему уравнений: $ab=3c, bc=5a, ac=7b$. **(5 решений: $(0;0;0)$, $(\sqrt{21}; -\sqrt{15}; -\sqrt{35})$, $(-\sqrt{21}; \sqrt{15}; -\sqrt{35})$, $(-\sqrt{21}; -\sqrt{15}; \sqrt{35})$, $(\sqrt{21}; \sqrt{15}; \sqrt{35})$). Перемножим все уравнения и получим, что $(abc)^2=105abc$, отсюда, abc равно либо 0, либо 105. В первом случае все числа – 0, а во втором – $c^2=35, a^2=21, b^2=15$. С учётом знаков получим ещё четыре тройки ответов $(\sqrt{21}; -\sqrt{15}; -\sqrt{35})$, $(-\sqrt{21}; \sqrt{15}; -\sqrt{35})$, $(-\sqrt{21}; -\sqrt{15}; \sqrt{35})$, $(\sqrt{21}; \sqrt{15}; \sqrt{35})$.)**