Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Лига "Гранд", 1 тур. 14.09.2011

1. Все стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ имеют равную длину. Диагонали AD и EC пересекаются в точке S под углом $\angle ASE = 60^\circ$. Докажите, что у этого пятиугольника есть две параллельных стороны.

2. Даны окружности k_1 и k_2, пересекающиеся в точках A и B, с центрами O_1 и O_2 соответственно, причем O_1 лежит на k_2. Отрезок O_1O_2 пересекает k_1 в точке C. Прямая BC пересекает вторично k_2 в точке D, прямая AD пересекает вторично k_1 в точке E. Пусть F – середина отрезка AE. Докажите, что лучи O_1A и O_1D делят угол CO_1F на три равные части.

3. В полном однокруговом турнире по футболу участвует $N > 2$ команд. Они договорились, что каждая команда в своей k-ой игре забивает k голов. Каково наименьшее количество ничьих в таком турнире?

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $2a^2 + b^2 = 9c^2$. Докажите, что $\frac{2c}{a} + \frac{c}{b} \geqslant \sqrt{3}$.

5. Дано множество A, состоящее из натуральных чисел, содержащее хотя бы 3 числа. Известно, что если $a \in A$, то A содержит все делители числа a, и если $a, b \in A$, причем $1 < a < b$, то $ab + 1 \in A$. Докажите, что A содержит все натуральные числа.

6. Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2c$, bc делится на $3a$ и ca делится на $5b$. Какое наименьшее значение может иметь произведение abc?

7. Слово из $n > 1$ букв можно разбить на несколько (больше одного) одинаковых кусков. Докажите, что если заменить первую букву другой, получившееся слово разбить таким образом не удастся.

8 Вещественные числа $x, y > 1$ удовлетворяют условию $x^y + x^{x^{y-1}} = y^x + y^{y^{x-1}}$. Докажите, что $x^y = y^x$.

9. Ребра графа на $n \geqslant 5$ вершинах с m ребрами покрашены в 2 цвета так, что любой одноцветный цикл содержит не менее 6 ребер. Докажите, что $m \leqslant \left[\frac{n^2}{3}\right]$.

10. Найдите наименьшее 2011-значное число такое, что десятичная запись числа, втрое большего него, содержит лишь четные цифры.

Шестой Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 12-18.09.2011

Первый тур. Премьер-лига. 14 сентября 2011 г.

1. Положительные числа a, b, c удовлетворяют уравнению $2a^2+b^2=9c^2$. Докажите, что $\frac{2c}{a}+\frac{c}{b}\geqslant\sqrt{3}$.

2. Все стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ имеют равную длину. Диагонали AD и EC пересекаются в точке S под углом $\angle ASE=60^\circ$. Докажите, что у этого пятиугольника есть две параллельных стороны.

3. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце сумма всех чисел целая. Сумма всех чисел таблицы равна 11. Докажите, что в какой-то клетке стоит число, не меньшее 3/5.

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1=60^\circ$ и $\angle ABC+\angle A_1B_1C_1=180^\circ$. Докажите, что $\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{A_1C_1}$.

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2c$, bc делится на $3a$ и ca делится на $5b$. Какое наименьшее значение может иметь произведение abc?

6. Вещественные числа $x,y>1$ удовлетворяют условию $x^y+x^{x^{y-1}}=y^x+y^{y^{x-1}}$. Докажите, что $x^y=y^x$.

7. Слово из $n>1$ букв можно разбить на несколько одинаковых кусков. Докажите, что если заменить первую букву другой, получившееся слово разбить таким образом не удастся.

8. Докажите, что в однокруговом турнире с 799 участниками (каждый встречается с каждым ровно один раз, ничьих нет) всегда можно указать 14 участников так, что каждый из первых семи выиграл у каждого из остальных семи.

Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Первый тур. Старт-лига. 14 сентября 2011 г.

1. Штирлиц должен передать в Центр набор из четырех секретных натуральных чисел $\{A, B, C, D\}$. Для большей секретности он отправил набор чисел $\{A + B, A + C, A + D, B + C, B + D\}$ неизвестно в каком порядке. Центр получил от Штирлица числа 13, 15, 16, 20, 22. Какие числа Штирлиц должен был передать в Центр?

2. На каждой из шести граней куба проведено по одной диагонали. Пусть N – количество (неупорядоченных) пар диагоналей, имеющих общую вершину. Найдите наибольшее значение N.

3. Можно ли в каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости записать по одному натуральному числу так, чтобы в любом горизонтальном и вертикальном ряду все числа были попарно взаимно просты и все натуральные числа были использованы?

4. Докажите, что проекция окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, на гипотенузу видна из вершины прямого угла под углом 45°.

5. В полном однокруговом турнире по футболу участвует $N > 2$ команд. Они договорились, что каждая команда в своей k-ой игре забивает k голов. Каково наименьшее количество ничьих в таком турнире?

6. Найдите наименьшее 2011-значное число такое, что десятичная запись числа, втрое большего него, содержит лишь четные цифры.

7. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце сумма всех чисел целая. Сумма всех чисел таблицы равна 11. Докажите, что в какой-то клетке стоит число, не меньшее $\frac{3}{5}$.

8. Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2c$, bc делится на $3a$ и ca делится на $5b$. Какое наименьшее значение может иметь произведение abc?