Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Лига "Гранд", 4 тур (полуфинал). 17.09.2011

1. Четыре единичных круга с центрами A_1, A_2, A_3, A_4 расположены на плоскости так, что любые три из них можно пересечь одной прямой. Докажите, что четыре круга радиуса $\sqrt{2}$ с центрами A_1, A_2, A_3, A_4 можно пересечь одной прямой.

2. Дано натуральное число a. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел p таких, что для некоторого натурального n число $2^{2^n}+a$ делится на p.

3. Хромая ладья прошла все клетки доски $n\times n$ $(n\geqslant 2)$ ровно по одному разу и вернулась в начальную клетку. Соединяя центры соседних клеток по пути ладьи, получаем замкнутую ломаную L длины n^2. Докажите, что на доске найдутся две соседние (по стороне) клетки, центры которых делят ломаную L на две ломаные, длина каждой из которых не меньше $\frac{n^2}{4}$.

4. Дано натуральное $n\geqslant 2$. Найдите наибольшее число c такое, что для всех положительных $a_1,\ldots,a_n$ выполнено неравенство $\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}\geqslant\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)^2+c(a_1-a_n)^2$.

5. Дано натуральное число n. Докажите, что существует такой набор $\left[\frac{3}{5}n(n+1)\right]$ различных упорядоченных пар (x,y) натуральных чисел с $x\leqslant n$, $y\leqslant n$, что для любых пар $(x_1,y_1)\in S$, $(x_2,y_2)\in S$ пара (x_1+x_2,y_1+y_2) набору S не принадлежит.

6. Биссектриса AL треугольника ABC $(L\in BC)$ пересекает вторично его описанную окружность в точке M. Пусть I_b и I_c – центры вневписанных окружностей, лежащих напротив сторон AC и AB соответственно, $X=I_cM\cap I_bL$, $Y=I_cL\cap I_bM$. Докажите, что точки X, Y, B, C лежат на одной окружности.

7. В ряд записаны числа $1,2,\ldots,2010$. Двое играют в игру, расставляя по очереди знаки "$+$" либо "$\cdot$" между соседними числами. Первый выигрывает, если полученное в результате число делится на 3, в противном случае выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Нечетное число n дает попарно различные остатки r_2, r_3, …, r_{1000} при делении на 2, 3, …, 1000 соответственно. Известно, что $r_k=0$. Какие значения может принимать k?

9. В государстве 2011 городов. Каждая пара городов соединена односторонней авиалинией. Известно, что в каждый город входит не более k авиалиний и из каждого города выходит не более k авиалиний. При каком наибольшем k независимо от схемы авиалиний, удовлетворяющей условию, из каждого города можно долететь до другого?

10. Две окружности пересекаются в точках A и B. Парабола проходит через точки A и B и пересекает первую окружность в точках C и D, а вторую – в точках E и F (A, B, C, D, E, F – попарно различные точки). Докажите, что $CD\parallel EF$.

Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Лига "Гранд", 4 тур (бои за 5–8 места). 17.09.2011

1. Пусть M – множество, состоящее из $n > 1$ точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что количество треугольников площади 1 с вершинами в точках множества M не превосходит $\frac{2}{3}(n^2 - n)$.

2. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что $pqr + 1 = 2^{q^2+1}$.

3. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ удовлетворяют равенствам

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,\ y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1,\ x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = 0.$$

Докажите, что $(x_1 + x_2 + \ldots + +x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^2 \leqslant n$.

4. Дано натуральное число n. Докажите, что существует такой набор S из $\left[\frac{3}{5}n(n+1)\right]$ различных упорядоченных пар (x, y) натуральных чисел с $x \leqslant n$, $y \leqslant n$, что для любых пар $(x_1, y_1) \in S$, $(x_2, y_2) \in S$ пара $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ набору S не принадлежит.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B вписанная окружность касается стороны BC в точке D. Точки X и Z – центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и ADC, соответственно. Прямая XZ пересекает прямую AD в точке K, а описанную окружность треугольника ABC – в точках U и V. Прямая AD вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Y. Точка M – середина отрезка UV. Докажите, что $CY = 2MK$.

6. Вычислите сумму $\left[\frac{1}{13}\right] + \left[\frac{3}{13}\right] + \left[\frac{3^2}{13}\right] + \left[\frac{3^3}{13}\right] + \ldots + \left[\frac{3^{9999}}{13}\right]$.

7. В ряд записаны числа 1, 2, ..., 2010. Двое играют в игру, расставляя по очереди знаки "+" либо "·" между соседними числами. Первый выигрывает, если полученное в результате число делится на 3, в противном случае выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Нечетное число n дает попарно различные остатки $r_2, r_3, \ldots, r_{1000}$ при делении на 2, 3, ..., 1000 соответственно. Известно, что $r_k = 0$. Какие значения может принимать k?

9. Некоторые города страны Реконструкция соединены дорогами с односторонним движением. Оказалось, что, если закрыть любые 10 дорог на ремонт, из любого города можно будет добраться до любого другого. Какое наименьшее число городов может быть в этой стране?

10. Две окружности пересекаются в точках A и B. Парабола проходит через точки A и B и пересекает первую окружность в точках C и D, а вторую – в точках E и F (A, B, C, D, E, F – попарно различные точки). Докажите, что $CD \parallel EF$.

Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Четвёртый тур. Премьер-лига. Полуфинал. 17 сентября 2011 г.

1. Некоторые города страны Реконструкция соединены дорогами с односторонним движением. Оказалось, что, если закрыть любые 10 дорог на ремонт, из любого города можно будет добраться до любого другого. Какое наименьшее число городов может быть в этой стране?

2. Различные простые числа p и q, а также натуральные числа m и n таковы, что сумма $\frac{mp-1}{q}+\frac{nq-1}{p}$ – целая. Докажите, что $\frac{m}{q}+\frac{n}{p}>1$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B вписанная окружность касается стороны BC в точке D. Точки X и Z – центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и ADC, соответственно. Прямая XZ пересекает прямую AD в точке K, а описанную окружность треугольника ABC – в точках U и V. Прямая AD вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Y. Точка M – середина отрезка UV. Докажите, что $CY=2MK$.

4. Дано натуральное число n. Докажите, что существует такой набор S из $\left[\frac{3}{5}n(n+1)\right]$ различных упорядоченных пар (x,y) натуральных чисел с $x\leqslant n$, $y\leqslant n$, что для любых пар $(x_1,y_1)\in S$, $(x_2,y_2)\in S$ пара (x_1+x_2,y_1+y_2) набору S не принадлежит.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA', BB', CC'. Точки E и F расположены на отрезках CB' и BC' соответственно таким образом, что $B'E\cdot C'F=BF\cdot CE$. Докажите, что четырехугольник $AEA'F$ – вписанный.

6. Докажите, что натуральные числа a, b, c удовлетворяют неравенству $|a-b\sqrt{c}|<\frac{1}{2b}$ тогда и только тогда, когда $|a^2-b^2c|<\sqrt{c}$.

7. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию $f(f(x))=[x]$ при всех вещественных x. Докажите, что существуют вещественные числа a и b, для которых $|f(a)-f(b)|>|a-b|$.

8. Вещественные числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n, y_1, y_2, $\ldots$, y_n удовлетворяют равенствам

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1, y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2=1, x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n=0.$$

Докажите, что

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2+(y_1+y_2+\ldots+y_n)^2\leqslant n.$$

Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Четвёртый тур. Премьер-лига. Бои за 5-12 места. 17 сентября 2011 г.

1. Некоторые города страны Реконструкция соединены дорогами с односторонним движением. Оказалось, что, если закрыть любые 10 дорог на ремонт, из любого города можно будет добраться до любого другого. Какое наименьшее число городов может быть в этой стране?

2. Различные простые числа p и q, а также натуральные числа m и n таковы, что сумма $\frac{mp-1}{q} + \frac{nq-1}{p}$ – целая. Докажите, что $\frac{m}{q} + \frac{n}{p} > 1$.

3. У выпуклого четырехугольника $ABCD$ есть ровно одна пара параллельных сторон. Докажите, что стороны AB, BC, CD, DA не могут образовывать арифметическую прогрессию (в таком порядке).

4. Дано натуральное число n. Докажите, что существует такой набор S из $\left[\frac{5}{9}n^2\right]$ различных упорядоченных пар (x, y) натуральных чисел с $x \leqslant n$, $y \leqslant n$, что для любых пар $(x_1, y_1) \in S$, $(x_2, y_2) \in S$ пара $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ набору S не принадлежит.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA', BB', CC'. Точки E и F расположены на отрезках CB' и BC' соответственно таким образом, что $B'E \cdot C'F = BF \cdot CE$. Докажите, что четырехугольник $AEA'F$ – вписанный.

6. Докажите, что натуральные числа a, b, c удовлетворяют неравенству $|a - b\sqrt{c}| < \frac{1}{2b}$ тогда и только тогда, когда $|a^2 - b^2 c| < \sqrt{c}$.

7, Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $f(f(x)) = [x]$ при всех вещественных x. Докажите, что существуют вещественные числа a и b, для которых $|f(a) - f(b)| > |a - b|$.

8. Докажите, что если $x^3 + y^3 \leqslant 2$, где x и y – вещественные числа, то $x + y \leqslant 2$.

Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Четвертый тур. Старт-лига. Полуфинал. 17 сентября 2011 г.

1. В остроугольном треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Точка K выбрана на стороне AC так, что $KM > AM$. Докажите, что $KN < CN$.

2. В стране 10 городов, и из каждого в другие города выходит поровну дорог. Оказалось, что нет трех городов, соединённых дорогами каждый с каждым, но есть круговой маршрут, состоящий из нечетного числа дорог. Какое наибольшее число дорог может быть в стране?

3. Две свахи предложили два различных плана женитьбы ста женихов на ста невестах. Каждый из женихов принял предложение одной из свах, и при этом удалось заключить сто браков. Докажите, что если бы каждый жених принял предложение другой свахи, то также удалось бы заключить сто браков.

4. Пусть для некоторых натуральных чисел m и n число $m^2 + 2n$ является точным квадратом. Докажите, что тогда число $m^2 + n$ можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

5. Поставьте в одну из клеток доски 7×7 шахматного коня и сделайте им наименьшее возможное число ходов, чтобы все клетки доски хотя бы раз оказались под боем.

6. Сумма 20 различных целых (не обязательно натуральных!) чисел равна 210. Какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов этих чисел?

7. Несколько чисел выписаны в строчку. Если оказывается, что какое-то число больше другого, но стоит в ряду левее него, то эти два числа меняют местами и к ним обоим прибавляют по единице. Верно ли, что этот процесс обязательно завершится?

8. У каждого из трех поросят есть по 3000 карточек с написанными на них натуральными числами. Каждый из поросят может так выложить все свои карточки в ряд, чтобы каждое число было больше предыдущего на одно и то же значение. На карточках можно найти все целые числа от 1 до 8. Докажите, что можно найти и число 2011.

Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Четвертый тур. Старт-лига (бой за 5 место). 17 сентября 2011 г.

1. В остроугольном треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Точка K выбрана на стороне AC так, что $KM > AM$. Докажите, что $KN < CN$.

2. Две свахи предложили два различных плана женитьбы ста женихов на ста невестах. Каждый из женихов принял предложение одной из свах, и при этом удалось заключить сто браков. Докажите, что если бы каждый жених принял предложение другой свахи, то также удалось бы заключить сто браков.

3. При каких натуральных n из чисел n, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, n^2 можно выбрать четыре попарно различных числа a, b, c, d, для которых справедливо равенство $ab = cd$?

4. Найдите все натуральные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

5. Дана доска 7×7, раскрашенная в шахматном порядке. Какое наименьшее количество коней необходимо поставить на доску так, чтобы все клетки доски оказались под боем (в том числе и те, на которых стоят кони)?

6. На турнир приехало несколько учеников. Среди них есть ровно один, у которого на турнире есть один друг; ровно двое, у которых на турнире по два друга, $\ldots$, ровно 20, у которых по 20 друзей. Больше, чем 20 друзей, ни у кого нет. Возможна ли такая ситуация?

7. Какое наибольшее количество элементов может быть в наборе натуральных чисел, разность любых двух из которых является целой степенью двойки?

8. У каждого из трех поросят есть по 3000 карточек с написанными на них натуральными числами. Каждый из поросят может выложить все свои карточки в ряд, чтобы каждое число было больше предыдущего на одно и то же значение. На карточках можно найти все целые числа от 1 до 8. Докажите, что можно найти и число 2011.