

## Седьмой Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 18-25.09.2012

Третий тур. Премьер-лига. 22 сентября 2012 г.

1. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Точка  $D$  на стороне  $AB$  такова, что  $|BD| = |BC|$ . Точка  $E$  на перпендикуляре к  $AB$ , восставленном в точке  $A$ , такова, что  $|AE| = |AC|$ . Точки  $E$  и  $C$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$ . Докажите, что точки  $C$ ,  $D$  и  $E$  лежат на одной прямой.

2. Какое наименьшее количество ладей можно расставить на доске  $100 \times 100$  так, чтобы каждая клетку било не менее двух ладей? Ладья не бьёт клетку, на которой стоит, но бьёт каждую клетку, находящуюся с ней в одной вертикали или горизонтали, даже если между ней и этой клеткой есть другие ладьи.

3. На плоскости дано бесконечное множество точек. Докажите, что из этих точек можно выбрать 100 таких, что все попарные расстояния между выбранными точками будут различны.

4. Стая обезьян разместилась по кругу. У каждой обезьяны есть несколько бананов и ананасов. Известно, что никакие две обезьяны, которые сидят не рядом, не могут одновременно поделить общее количество имеющихся у них бананов и ананасов (отдельно те и другие) поровну, не деля фрукты на части. Какое наибольшее количество обезьян может быть в этой стае?

5. Найдите все пары простых чисел  $(p, q)$  такие, что  $p^5 - 2q^2 = (4p - q)^2$ .

6. Решите в положительных числах систему

$$\begin{cases} 2x^3 + 1 = 3zx \\ 2y^3 + 1 = 3xy \\ 2z^3 + 1 = 3yz \end{cases}$$

7. Точки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $W$  расположены на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  квадрата  $ABCD$  соответственно так, что  $\angle BXY = \angle CYZ = \angle DZW = \angle AWX \neq 45^\circ$ . Докажите, что  $XYZW$  – квадрат.

8. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 1000000 так, чтобы среди выбранных не было трёх различных чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , для которых  $a$  делится на  $b$ , а  $b$  делится на  $c$ ?