



# СТАРТ-ЛИГА

Третий тур. 22 сентября 2012 г.

1. В стране 20 городов. Между любыми двумя городами есть двусторонние авиалинии. По антимонопольному закону, если авиакомпания владеет двумя смежными линиями (из  $A$  в  $B$  и из  $B$  в  $C$ ), то она не может владеть линией из  $A$  в  $C$ . Могут ли все авиалинии принадлежать четырём компаниям?
2. Пусть  $S(a)$  - сумма цифр в десятичной записи числа  $a$ . Известно, что  $S(n)=503$ ,  $S(121n)=2012$ . Чему может равняться  $S(11n)$ ?
3. Найдите все целые значения  $n$ , для которых  $n^2 + 5n + 1$  – точный квадрат (квадрат целого числа).
4. В куче 2012 камней. Играют два игрока. Первый каждым своим ходом может взять либо 1, либо 4 камня. Второй каждым своим ходом может взять либо 1, либо 3 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?
5. В шеренгу стоят 2012 хлопцев, каждый из которых либо казак (всегда говорит правду), либо брехун (всегда лжёт). Каждый из них сказал: «Количество брехунов слева от меня больше количества брехунов справа от меня». Сколько брехунов в этой шеренге?
6. Стая обезьян разместились по кругу. У каждой обезьяны есть несколько бананов и ананасов. Известно, что никакие две обезьяны, которые сидят не рядом, не могут одновременно поделить общее количество имеющихся у них бананов и ананасов (отдельно те и другие) поровну, не деля фрукты на части. Какое наибольшее количество обезьян может быть в этой стае?
7. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Точка  $D$  на стороне  $AB$  такова, что  $BD = BC$ . Точка  $E$  на перпендикуляре к  $AB$ , восставленном в точке  $A$ , такова, что  $AE = AC$ . Точки  $E$  и  $C$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$ . Докажите, что точки  $C$ ,  $D$  и  $E$  лежат на одной прямой.
8. Квадрат  $11 \times 11$  разбит на квадраты  $4 \times 4$  и прямоугольники  $1 \times 3$  или  $3 \times 1$ . Докажите, что в большом квадрате найдётся ряд (строка или столбец), пересекающий чётное число фигур.