



СТАРТ-ЛИГА

Третий тур. 22 сентября 2012 г.

1. В стране 20 городов. Между любыми двумя городами есть двусторонние авиалинии. По антимонопольному закону, если авиакомпания владеет двумя смежными линиями (из A в B и из B в C), то она не может владеть линией из A в C . Могут ли все авиалинии принадлежать четырём компаниям?
2. Пусть $S(a)$ - сумма цифр в десятичной записи числа a . Известно, что $S(n)=503$, $S(121n)=2012$. Чему может равняться $S(11n)$?
3. Найдите все целые значения n , для которых $n^2 + 5n + 1$ – точный квадрат (квадрат целого числа).
4. В куче 2012 камней. Играют два игрока. Первый каждым своим ходом может взять либо 1, либо 4 камня. Второй каждым своим ходом может взять либо 1, либо 3 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?
5. В шеренгу стоят 2012 хлопцев, каждый из которых либо казак (всегда говорит правду), либо брехун (всегда лжёт). Каждый из них сказал: «Количество брехунов слева от меня больше количества брехунов справа от меня». Сколько брехунов в этой шеренге?
6. Стая обезьян разместилась по кругу. У каждой обезьяны есть несколько бананов и ананасов. Известно, что никакие две обезьяны, которые сидят не рядом, не могут одновременно поделить общее количество имеющихся у них бананов и ананасов (отдельно те и другие) поровну, не деля фрукты на части. Какое наибольшее количество обезьян может быть в этой стае?
7. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Точка D на стороне AB такова, что $BD = BC$. Точка E на перпендикуляре к AB , восставленном в точке A , такова, что $AE = AC$. Точки E и C лежат по разные стороны от прямой AB . Докажите, что точки C , D и E лежат на одной прямой.
8. Квадрат 11×11 разбит на квадраты 4×4 и прямоугольники 1×3 или 3×1 . Докажите, что в большом квадрате найдётся ряд (строка или столбец), пересекающий чётное число фигур.