



СТАРТ-ЛИГА

Финал. 23 сентября 2013 г.

1. Сумма двух различных натуральных чисел является степенью двойки. Докажите, что их произведение отличается от некоторой степени двойки на точный квадрат натурального числа.
2. На плоскости отмечены 300 точек. Докажите, что их можно накрыть тремя равными неперекрывающимися треугольниками так, чтобы внутрь каждого попало ровно по 100 точек.
3. По разные стороны отрезка AM лежат треугольники AMB и AMC . Известно, что $\angle BAM=30^\circ$, $\angle BMA=110^\circ$, $\angle CAM=20^\circ$, $\angle CMA=150^\circ$. Найдите углы треугольника BMC .
4. Однокруговой турнир 30 котов по спортивному царापанию судят 15 псов. В каждом туре коты разбиваются на пары, поединки всех 15 пар проходят одновременно, и каждый поединок судит один пёс. Может ли случиться, что после 15 туров каждый пёс по разу посудил каждого из котов?
5. На Луне ходят купюры достоинствами 1, m и n фертингов (m и n – натуральные, $1 < m < n$). Если не использовать купюр достоинства m , то 1000 фертингов можно набрать 77-ю купюрами, а меньшим числом купюр набрать нельзя. То же верно, когда не используются купюры достоинства n . Найдите m и n .
6. Есть 20 палочек двух цветов. Известно, что если выбрать любые три палочки, и среди них есть палочки обоих цветов, то можно составить треугольник со сторонами, равными этим палочкам. Докажите, что найдутся три палочки одинакового цвета, из которых можно составить треугольник.
7. Есть клетчатая доска 100×100 и куча из двух тысяч шашек. Петя и Вася ходят по очереди. Петя каждым своим ходом выставляет 8 шашек из кучи по одной на свободные поля доски. Вася каждым своим ходом может снять с доски одну шашку или одну группу шашек, стоящих подряд без пропуска в одной вертикали или горизонтали. Может ли Петя после некоторого своего хода предъявить (среди прочего) целиком заполненный квадрат 13 на 13 ?
8. Натуральные числа от 1 до 2013 покрасили в красный и синий цвета. Есть красная и синяя пара чисел с одинаковым отношением. Докажите, что найдутся красная и синяя пара чисел с одинаковой разностью.