

## Восьмой Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 17-24.09.2013

Четвёртый тур. Премьер-лига. 22 сентября 2013 г.

1. Цифры натурального числа, не кратного 10, записали в обратном порядке и получившееся число прибавили к исходному. Докажите, что результат кратен 81 тогда и только тогда, когда сумма цифр исходного числа делится на 81.

2. На плоскости несколько правильных десятиугольников с соответственно параллельными сторонами раскрашены в 11 цветов. Известно, что любые два десятиугольника разных цветов имеют общую точку. Докажите, что для какого-то цвета любые два десятиугольника этого цвета имеют общую точку.

3. На шахматной доске  $50 \times 50$  в начале игры находился белый король в углу и 100 черных ладей. Ходили по очереди, начинали белые. Король, ни разу не попав под шах и не побив ни одной ладьи, перешел в противоположный угол. Докажите, что король сделал более 200 ходов.

4. Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность  $S$ . Отрезки  $AD$  и  $BE$  пересекаются в точке  $T$ . Прямая, параллельная  $CD$  и проходящая через  $T$  пересекает отрезки  $AB$  и  $CE$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $AXY$  касается  $S$ .

5. Найдите все такие числа  $M$ , что для любых положительных чисел  $a, b, c$  хотя бы одно из чисел  $a + \frac{M}{ab}$ ,  $b + \frac{M}{bc}$ ,  $c + \frac{M}{ca}$  не меньше, чем  $1 + M$ .

6. Дана окружность и точка  $P$  внутри нее. Через  $P$  проводятся всевозможные пары хорд  $XU$  и  $ZT$ . Докажите, что все прямые, проходящие через центры описанных окружностей треугольников  $PXZ$  и  $PYT$ , проходят через фиксированную точку, не зависящую от выбора хорд.

7. Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $b + 1$  кратно  $a$ , а  $a^2 - 2$  кратно  $b$ . Докажите, что  $\frac{b+1}{2}$  – квадрат натурального числа.

8. Ожерелье состоит из 90 бусин красного, синего и зелёного цвета. Известно, что среди любых пяти бусин, идущих подряд, есть хотя бы одна красная, а среди любых семи, идущих подряд – хотя бы одна синяя. Какое наибольшее количество зелёных бусин может быть в этом ожерелье?