

Группа старт. Первая лига. Тур 1.

20 сентября

1. Найдите такое наименьшее натуральное число N , что, на какое бы двузначное число его ни умножить, сумма цифр произведения будет равна сумме цифр числа N .

2. Докажите, что любую коробку $3 \times 3 \times N$, где $N > 1$, можно полностью заполнить уголками из трёх кубиков.

3. Дано натуральное число $n > 10$. Министры Петя и Вася играют в игру. У них есть карта с n городами. В начале Петя соединяет их $k \geq n$ дорогами, причем так, чтобы от любого города по дорогам можно было доехать до любого другого. Любые два города можно соединить не более чем одной дорогой. Затем Петя отмечает два города A и B и помещает в город A фишку. Далее каждым своим ходом Вася перемещает фишку в город, куда от текущего положения фишки можно пройти по одной имеющейся дороге. Петя же своим ходом разрушает одну дорогу. Если Вася в некоторый момент оказывается в городе B , то он побеждает. Иначе выигрывает Петя. При каком наибольшем k Петя может выиграть, как бы ни играл Вася?

4. Саша хочет отметить на плоскости n точек и раскрасить их в несколько цветов. При этом все расстояния между точками должны быть попарно различны. А для каждой отмеченной точки P две самые удаленные из отмеченных точек должны быть одного цвета. Какое наибольшее число цветов Петя сможет использовать хотя бы по разу?

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота $АН$. В треугольнике $АНС$ проведена высота $НК$. Оказалось, что $КС = АН$. Докажите, что $ВК$ — биссектриса угла ABC .

6. В ряд лежат 10 монет. Лежащие слева — настоящие, а справа — фальшивые. И те и другие есть. По виду монеты одинаковые, а по весу — любая настоящая весит 10 г, а фальшивая — 9 г. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить, сколько всего настоящих монет?

7. В числовой последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{1000000}$, состоящей из целых чисел, сумма любых 100 подряд идущих чисел равна 2017. Натуральное число $k \leq 1000000$ называется *хорошим*, если $a_k = k$. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел?

8. Сумма вещественных чисел a , b и c равна 0. Докажите, что хотя бы одна из сумм $N = a - 3b + c$, $M = 3b + 4c - 3a$ и $K = 2a + 4b - 5c$ не положительна.