

Четырнадцатая Всероссийская смена «Юный математик»


Задания конкурсного отбора

9-10 классы

20 мая 2018 г.

1. Существуют ли два различных целых числа x , y , для которых справедливо равенство

$$\frac{x}{2018} + \frac{y}{2019} = \frac{2018+2019}{2018 \cdot 2019} ?$$

2. Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет два различных целых ненулевых корня x_1 и x_2 . Известно, что $a + x_1$ делится на $b - 2x_2$. Чему может быть равно число x_1 ?
3. Каждый из ста прямоугольников 5×6 разрезали по клеточкам на несколько частей. Всего получилось N кусков. Из всех кусков сложили несколько квадратов 2×2 и несколько (больше нуля) фигурок вида  (при этом куски можно было поворачивать и переворачивать). Найдите наименьшее возможное значение N .
4. Существует ли 100-угольник, у которого квадрат одной стороны равен сумме квадратов остальных сторон?
5. Клетки доски 20×20 покрашены в шахматном порядке. Стоящая на доске фигура хамелеон держит под боем все клетки своей горизонтали, имеющие тот же цвет, что и клетка, на которой она стоит, а также все клетки своей вертикали, имеющие противоположный цвет. (Чтобы побить какую-то клетку, хамелеон может перепрыгивать через другие фигуры.) Какое наибольшее число не бьющих друг друга хамелеонов можно расставить на этой доске?
6. Произведение двух натуральных чисел, одно из которых на 10 больше другого, записывается одними девятками. Найдите эти числа.
7. В треугольнике ABC угол B вдвое больше угла C . На луче BA выбрана точка D так, что $AC = BD$. Докажите, что $AB + BC > CD$.
8. Перед открытием возле шашлычной «У Магомеда» стояла очередь из 100 человек и в течение дня еще приходили люди. Когда к стойке подходил очередной человек, Магомед делил время, оставшееся до конца рабочего дня на текущее число человек в очереди (включая очередного) и жарил ему шашлык ровно столько времени, сколько получалось в частном. Всего за день Магомед обслужил 130 человек. Докажите, что найдутся пять человек, которые ждали шашлык одинаковое время. (Считается, что никто не становится в конец очереди в тот момент, когда очередной человек подходит к стойке).