

Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 19–25.09.2018

Командная олимпиада. 19.09.2018
Юниорская лига (9 класс).

1. Для положительных чисел x и y , произведение которых равно 1, докажите равенство

$$\frac{1}{1+x+x^2} + \frac{1}{1+y+y^2} + \frac{1}{1+x+y} = 1.$$

2. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - 5y^2 = 8z^2$.

3. Даша разместила в Инстаграме пять фотографий. Каждая фотография понравилась более чем половине её друзей (а друзей у Даши больше одного). Докажите, что найдутся два друга, таких что каждая фотография понравилась хотя бы одному из них.

4. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB катет BC длиннее катета AC . Точка D — основание высоты, опущенной из вершины C . Окружность радиуса CD с центром D пересекает катет BC в точке Q , гипотенузу AB в точке F , а продолжение AB — в точке E . Отрезок QE пересекает катет AC в точке P . Докажите, что $PE = QF$.

5. Каждая клетка бесконечной клетчатой доски окрашена в один из n данных цветов. Все 6 клеток любого прямоугольника 2×3 (или 3×2) имеют разные цвета. При каком наименьшем значении n возможна такая раскраска?

6. В круговом турнире по настольному теннису (каждые двое спортсменов сыграли ровно одну партию) участвовали европейские и азиатские спортсмены, причём европейских было вдвое больше. Оказалось, что количество побед, одержанных азиатскими спортсменами, в $9/7$ раз больше, чем количество побед, одержанных европейскими. Сколько всего спортсменов могло участвовать в турнире?

7. Остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H вписан в окружность ω с центром O . Прямая d проходит через H и пересекает дуги AB и AC в точках P и Q соответственно. Пусть AA' — диаметр окружности ω . Прямые $A'P$ и $A'Q$ пересекают BC в точках K и L соответственно. Докажите, что точки O, K, L и A' лежат на одной окружности.

8. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде

$$\frac{a[b, c] + b[c, a] + c[a, b]}{[a, b, c]}$$

для некоторых натуральных a, b, c (через $[x, y, \dots]$ обозначен НОК чисел x, y, \dots).

Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 19–25.09.2018

Командная олимпиада. 19.09.2018
Юниорская лига (9 класс).

1. Для положительных чисел x и y , произведение которых равно 1, докажите равенство

$$\frac{1}{1+x+x^2} + \frac{1}{1+y+y^2} + \frac{1}{1+x+y} = 1.$$

2. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - 5y^2 = 8z^2$.

3. Даша разместила в Инстаграме пять фотографий. Каждая фотография понравилась более чем половине её друзей (а друзей у Даши больше одного). Докажите, что найдутся два друга, таких что каждая фотография понравилась хотя бы одному из них.

4. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB катет BC длиннее катета AC . Точка D — основание высоты, опущенной из вершины C . Окружность радиуса CD с центром D пересекает катет BC в точке Q , гипотенузу AB в точке F , а продолжение AB — в точке E . Отрезок QE пересекает катет AC в точке P . Докажите, что $PE = QF$.

5. Каждая клетка бесконечной клетчатой доски окрашена в один из n данных цветов. Все 6 клеток любого прямоугольника 2×3 (или 3×2) имеют разные цвета. При каком наименьшем значении n возможна такая раскраска?

6. В круговом турнире по настольному теннису (каждые двое спортсменов сыграли ровно одну партию) участвовали европейские и азиатские спортсмены, причём европейских было вдвое больше. Оказалось, что количество побед, одержанных азиатскими спортсменами, в $9/7$ раз больше, чем количество побед, одержанных европейскими. Сколько всего спортсменов могло участвовать в турнире?

7. Остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H вписан в окружность ω с центром O . Прямая d проходит через H и пересекает дуги AB и AC в точках P и Q соответственно. Пусть AA' — диаметр окружности ω . Прямые $A'P$ и $A'Q$ пересекают BC в точках K и L соответственно. Докажите, что точки O , K , L и A' лежат на одной окружности.

8. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде

$$\frac{a[b, c] + b[c, a] + c[a, b]}{[a, b, c]}$$

для некоторых натуральных a, b, c (через $[x, y, \dots]$ обозначен НОК чисел x, y, \dots).