

Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 19–26.09.2018

БОЙ №1. 20.09.2018. СТАРТ-ЛИГА

1. Из пункта A в пункт B выехал гонщик, а спустя некоторое время другой гонщик выехал из пункта B в пункт A . Скорости гонщиков постоянны, но не обязательно одинаковы. Гонщики встретились в точке C лицом к лицу, после чего развернулись и поехали назад. Доезжая до своего начального пункта, каждый гонщик разворачивается и снова едет в противоположную сторону до встречи с другим гонщиком, разворачивается и т. д. Вторая встреча произошла опять лицом к лицу, но уже в точке D . В какой из точек отрезка AB произойдет сотая встреча гонщиков?

2. При каких m квадрат $m \times m$ можно разбить на равное количество квадратов 2×2 и 1×1 ?

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ рассматриваются 5 отрезков — его диагонали. Тройка диагоналей называется *удачной*, если из них можно составить треугольник. Какое наименьшее возможное количество удачных треугольников может быть?

4. В клубе джентльменов каждые два джентльмена — либо друзья, либо враги. Известно, что у каждого ровно 75 врагов. Кроме того, в клубе выполняется правило: «Враг моего друга — мой враг». Сколько джентльменов могло быть в клубе?

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполнено равенство $AB = BD + CD$. Пусть E — середина диагонали AC . Докажите, что $\angle BED = 90^\circ$.

6. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, в котором любые три подряд идущие цифры образуют трёхзначное простое число.

7. По кругу расставлены $2n + 1$ точек: n белых, n красных и одна чёрная. Докажите, что можно соединить $2n$ из этих точек n непересекающимися отрезками так, чтобы ни один из отрезков не соединял белую и красную точки.

8. Десятичные записи чисел $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2018}$ выписаны друг за другом в строчку. На какую наибольшую степень двойки делится полученное число?