

XVII Всероссийская смена «Юный математик»
Задания конкурсного отбора
9-10 классы

15.05.2021

1. Есть 9 карточек с цифрами 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 8 соответственно. Карточки, на которых написано нечетное число окрашиваются в красный цвет, а остальные – в зеленый. Сколько существует способов расположить 9 карточек в ряд так, чтобы числа на красных карточках были расположены в неубывающем порядке.
2. Положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{2a+1} + \frac{b}{3b+1} + \frac{c}{6c+1} \leq \frac{1}{2}.$$

3. В треугольнике ABC $\angle B = 46,6^\circ$. Точка D лежит на отрезке BC так, что $\angle BAD = 20,1^\circ$ и $AB = CD$. Найдите $\angle CAD$.
4. В клетки таблицы 3×3 расставили числа от 1 до 9. Найдите вероятность того, что сумма троек чисел в каждой строке и каждом столбце нечетна.
5. Пусть α и β – углы некоторого треугольника. Правда ли, что хотя бы одно из уравнений $x^2 - 2x \cdot \sin \alpha + \sin^2 \beta = 0$ и $x^2 - 2x \cdot \cos \alpha + \cos^2 \beta = 0$ имеет решение?
6. На плоскости нарисовано 100 треугольников. На какое максимальное количество областей эти треугольники могут разделить плоскость?
7. Положительные числа x, y, z таковы, что

$$x^2 + xy + y^2 = 25; y^2 + yz + z^2 = 144; z^2 + zx + x^2 = 169.$$

Чему равно $(xy + yz + zx)^2$?

8. Внутри квадрата $ABCD$ рассмотрим точку P . Назовем *мельницей* с центром в точке P пару перпендикулярных прямых l_1 и l_2 , проходящих через P , для которых:
 - l_1 пересекает отрезки AB и CD ,
 - l_2 пересекает отрезки BC и DA .

Пусть l_1 пересекает отрезки AB и CD в точках W и Y , соответственно, а l_2 пересекает отрезки BC и DA в точках X и Z , соответственно.

Мельница называется *круглой*, если четырехугольник $WXYZ$ вписан. Определите, для каких точек P внутри квадрата $ABCD$ каждая мельница с центром в P является круглой.