Математическая игра «7 Чудес». 10–11 классы. Решения и ответы

Задача 1. На доску последовательно выписали все числа от 2025 до 202500: 202520262027 ... 202499202500. Сколько раз в это последовательности встретилось число 1812?

Решение. Сосчитаем вхождения *внутри* отдельных чисел:
В 5-значных числах: подстрока на позициях 1–4: числа 18120–18129 (10 чисел); подстрока на позициях 2–5: числа $X1812$ ($X = 1, \ldots, 9$, 9 чисел).
В 6-значных числах: подстрока на позициях 1–4: 181200–181299 (100 чисел); подстрока на позициях 2–5: числа $A1812B$ ($A = 1$, $B = 0, \ldots, 9$ — 10 чисел); подстрока на позициях 3–6: числа $AB1812$ ($A = 1$, $B = 0, \ldots, 9$ — 10 чисел; $A = 2$, $B = 0$ — 1 число). Итого внутри: $10 + 9 + 100 + 10 + 11 = 140$.

Вхождения *на границах* между числами:
Последняя цифра предыдущего числа+первые три следующего: 4-значные: 812[1 812]2 (1); 5-значные: $812X[1\quad 812]X2$ ($X = 0, \ldots, 9$ — 10);
Последние две цифры предыдущего+первые две следующего: 5-значные: $12X[18\quad 12]X19$ ($X = 0, \ldots, 9$ — 10); 6-значные: $12XY[18\quad 12]XY19$ ($X,Y = 0, \ldots, 9$ — 100);
Последние три цифры предыдущего+первая следующего: 4-значные: 2[181 2]182 (1); 5-значные: $2X[181\quad 2]X182$ ($X = 0, \ldots, 9$ — 10); 6-значные: 200[181 2]00181, 201[181 2]01182, 202[181 2]02182 (3);Всего на границах: $11 + 110 + 14 = 135$. Общее количество: $140 + 135 = 275$.

Ответ. 275

Задача 2. Найдите такое наименьшее натуральное N, что числа от 3 до N можно разбить на непересекающиеся группы так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме остальных чисел этой группы.

Решение. Решим задачу в общем виде:
Пусть n — натуральное число. Каково наименьшее число m ($m > n$), при котором множество всех натуральных чисел от n до m (включительно) можно разбить на подмножества так, чтобы в каждом подмножестве одно из чисел равнялось сумме других чисел этого подмножества?
Оценка. Пусть числа от n до m удалось разбить на k подмножеств. Самое большое число в каждом подмножестве назовём просто *большим*, а остальные – *маленькими*. Очевидно, маленьких чисел в каждом множестве не менее двух, поэтому большие составляют не более трети и $k \leqslant \frac{m-n+1}{3}$. Сумма всех больших чисел не превосходит суммы k наибольших чисел, не превосходящих m, а, следовательно, сумма $\frac{(m-n+1)(m+n)}{2}$ всех чисел от n до m – удвоенной суммы k наибольших чисел, то есть $k(2m+1-k)$. Последнее выражение возрастает при $k \leqslant \frac{2m+1}{2}$, следовательно, $\frac{(m-n+1)(m+n)}{2} \leqslant$ $\leqslant \frac{m-n+1}{3}(2m+1-\frac{m-n+1}{3})$. Сокращая последнее неравенство на $\frac{m-n+1}{18}$, получаем $9m+9n \leqslant 10m+2n+4$, откуда $m \geqslant 7n-4$.
Пример для $n = 7m-4$: большие числа от $5n-2$ до $7n-4$; при i от 0 до $n-2$ большое число $6n-4-i$ равно сумме маленьких $n+i$ и $5n-4-2i$; при j от 0 до $n-1$ большое число $7n-4-j$ равно сумме маленьких $2n-1+j$ и $5n-3-2j$.

Ответ. $N = 17$

Задача 3. Назовём четырёхзначное число $\overline{abcd}$ любопытным, если сумма двузначных чисел $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ равна двузначному числу $\overline{bc}$. Например, число 1978 любопытное, так как $19 + 78 = 97$. Найти количество любопытных чисел.

Решение. Составим уравнение $\overline{ab} + \overline{cd} = 10(a+c) + b + d = \overline{bc} = 10b + c$, откуда $10a + 9c + d = 9b$. Разность $9(b-c)$ делится на 9 , значит и сумма $10a + d = 9(b-c)$ делится на 9 , что равносильно делимости на 9 суммы $a + d = 9(b-c-a)$. Сумма двух различных чисел из интервала от 0 до 9 не меньше 1 и не больше 17. поэтому последнее возможно только при $a + d = 9$. Подставим это в предыдущее уравнение, получим $b = a+c+1$, следовательно четвёрка (a, b, c, d) может быть записана в виде $(a, a+c+1, c, 9-a)$, где a, c — любая пара цифр, удовлетворяющих соотношениям $a \geqslant 1, a+c \leqslant 8$. При каждом фиксированном $a = 1,2, \ldots, 8$ значение c может быть любым от 0 до $8-a$, всего $9-a$ вариантов. Следовательно, общее количество любопытных чисел равно сумме $8 + 7 + \ldots + 1 = 36$.

Ответ. 36

Задача 4. Каких (и на сколько) натуральных чисел больше: 10-значных с суммой цифр 9 или 9-значных с суммой цифр 10?

Решение. Каждому числу $\overline{a_1a_2\dots a_k}$ (то есть числу, которое записывается цифрами $a_1, a_2, \dots, a_k$ именно в этом порядке) поставим в соответствие последовательность шаров и перегородок по такому правилу. Сначала пойдет a_1 шаров, потом перегородка, потом a_2 шаров, потом перегородка, и так далее, в конце будут перегородка и a_k шаров.

10-значным числам с суммой цифр 9 соответствуют 9 перегородок и 9 шаров (вид А). 9-значным числам с суммой цифр 10 соответствуют 8 перегородок и 10 шаров (вид Б). Докажем, что последовательностей видов А и Б поровну. Все они начинаются с шара, поэтому его можно отбросить. Последовательности вида А превратятся в такие, где 8 шаров и 9 перегородок идут в произвольном порядке. Последовательности вида Б — в такие, где 9 шаров и 8 перегородок идут в произвольном порядке. Если шары заменить на перегородки, то 8 шаров и 9 перегородок превратятся в 9 шаров и 8 перегородок. Значит, последовательностей того и другого вида поровну.

Но ровно одна из последовательностей вида Б (после первого шара сразу стоят 9 шаров, а потом 8 перегородок) не соответствует никакому числу.

Ответ. 10-значных чисел с суммой цифр 9 на одно больше, чем 9-значных чисел с суммой цифр 10.

Задача 5. Есть два выпуклых многоугольника. У первого многоугольника вдвое больше острых углов, чем у второго тупых, а у второго втрое больше острых углов, чем у первого тупых. Также известно, что у каждого из них есть хотя бы один острый угол и что у этих многоугольников (одного или обоих) есть еще и прямые углы.Сколько прямых углов у каждого из многоугольников?

Решение. Оценим, сколько нетупых углов может быть у выпуклого многоугольника. Пусть многоугольник имеет n углов, из которых k нетупые. С одной стороны, сумма углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$. С другой стороны, k его углов не больше 90°, а остальные $(n-k)$ меньше 180°. Получаем неравенство $180^\circ \cdot (n-2) \leqslant 90^\circ \cdot k + 180^\circ \cdot (n-k)$, из которого после преобразования получается $k \leqslant 4$. Поэтому нетупых углов не больше четырех. При этом равенство достигается только в случае, когда все углы прямые.

А значит, острых углов не больше трех. Учитывая это, делаем выводы, что у первого многоугольника может быть только 2 острых угла, у второго - 3 , и у них по одному тупому углу.

Прямых углов у второго многоугольника нет (так как уже есть три острых). Значит, прямой угол есть у первого многоугольника, и раз у него уже два острых угла, то прямой угол только один.

Ответ. У первого — 1, у второго — 0

Задача 6. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы углов A и B обратно пропорциональны противолежащим сторонам. Найдите угол C.

Решение. Пусть AA_1, BB_1 - биссектрисы треугольника, AA_2, BB_2 — его высоты. Из условия задачи следует, что $AA_1/AA_2 = BB_1/BB_2$ и, значит, $\angle A_1AA_2 = \angle B_1BB_2$. Но $\angle A_1AA_2 = |\angle B - \angle C|, \angle B_1BB_2 = |\angle A - \angle C|$. Так как треугольник неравнобедренный, равенство $\angle A - \angle C = \angle B - \angle C$ невозможно. Следовательно, $\angle C = (\angle A + \angle B)/2 = 60^\circ$.

Ответ. 60°

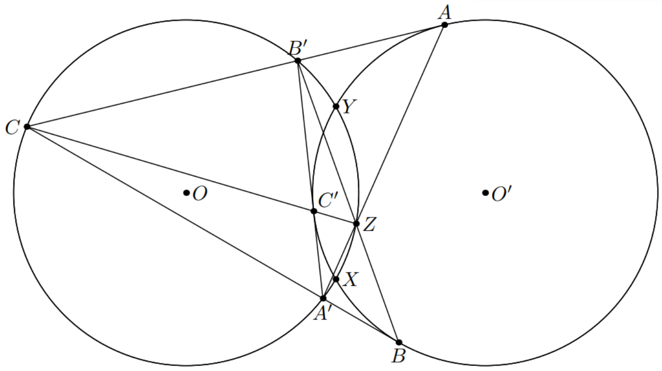
Задача 7. Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, Y, расстояние между которыми тоже равно 1 . Из точки C одной окружности проведены к другой касательные CA, CB, вторично пересекающие первую окружность в точках B', A'. Прямые AA' и BB' пересекаются в точке Z. Найдите угол XZY.

Решение. Из условия следует, что расстояние между центрами окружностей равно $\sqrt{3}$, значит, по формуле Эйлера эти окружности для треугольника $A'B'C$ являются описанной и вневписанной, т.е. $A'B'$ касается второй окружности в точке C', лежащей на прямой CZ.

Пусть O, O' - центры окружностей. Тогда $\angle A'O'A = \angle AO'C' + \frac{1}{2}\angle C'O'B = 2\angle ABC' + \angle C'AB = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B', \angle O'A'O = \angle O'A'B' + \angle B'A'O = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A' + \frac{\pi}{2} - \angle BCA = \pi - \angle BCA - \frac{1}{2}\angle CA'B' = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B'$, и, так как $O'A = OA'$, то $AO'A'O$ - равнобедренная трапеция. Поэтому $\angle O'AA' = \angle A'OO'$ и, аналогично, $\angle O'BB' = \angle B'OO'$.

Следовательно, $\angle A'ZB' = 2\pi - \angle AO'B - \angle A'OB' = \pi - \angle C$, т.е. точка Z лежит на описанной окружности треугольника и $\angle XZY = 150^\circ$.

Примечание. Доказать, что Z лежит на окружности, можно и по-другому. При изогональном сопряжении относительно треугольника $A'B'CZ$ перейдет в центр гомотетии окружностей, который в силу равенства их радиусов является бесконечно удаленным.



Ответ. 150°

Задача 8. Дан выпуклый n-угольник $A_1 \dots A_n$. Пусть $P_i (i = 1, \dots, n)$ — такая точка на его границе, что прямая A_iP_i делит его площадь пополам. Дано, что все точки P_i не совпадают с вершинами и лежат на k сторонах n-угольника. Каково наименьшее и наибольшее возможное значение k при каждом данном n?

Решение. Так как отрезки A_iP_i делят площадь многоугольника пополам, любые два из них пересекаются. Пусть точка P_i лежит на стороне A_jA_{j+1}. Тогда точки P_j и P_{j+1} лежат по разные стороны от A_i, т.е. всегда найдутся три точки, лежащие на разных сторонах. С другой стороны, если две вершины многоугольника являются вершинами правильного треугольника, а все остальные расположены вблизи его третьей вершины, то все точки P_i лежат на трех сторонах многоугольника. Очевидно, для правильного n-угольника при нечетном n все P_i лежат на разных сторонах. Пусть $n = 2m$. Так как отрезки A_mP_m и $A_{2m}P_{2m}$ пересекаются, точки P_m и P_{2m} лежат по одну сторону от диагонали A_mA_{2m}. По другую сторону от этой диагонали лежат m сторон многоугольника, и точка P_i может попасть на эти стороны, только если соответствующая вершина A_i лежит между P_m и P_{2m}. Но таких вершин не больше, чем $m-1$, значит существует сторона, на которой нет точек P_i. Рассмотрим теперь n-угольник, вершины $A_1, \dots, A_{n-2}$ которого являются вершинами правильного $n-1$-угольника, а вершины A_{n-1}, A_n расположены вблизи оставшейся вершины этого $n-1$-угольника. Точки P_i расположены на всех сторонах построенного многоугольника, кроме $A_{n-1}A_n$.

Ответ. Наименьшее значение равно 3, наибольшее равно $n-1$ при четном n и n при нечетном n.

Задача 9. Выпишем по возрастанию все положительные несократимые дроби, меньшие 1, знаменатели которых меняются от 2 до 2018 . Чему равно среднее арифметическое этих дробей?

Решение. Докажем, что если дробь $\frac{a}{b}$ есть в нашем ряду, то и дробь $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$ тоже. В самом деле, она положительна и меньше 1 . Она и несократима: если бы $b-a$ и b имели общий делитель, то их разность $b-(b-a) = a$ тоже имела бы этот делитель, и дробь $\frac{a}{b}$ была сократимой. Но тогда выписанные дроби можно разбить на пары $\frac{a}{b}$ и $\frac{b-a}{b}$ с суммой 1 , и одна дробь останется без пары - это $\frac{1}{2}$ (лишь она парна самой себе). Тогда если всего дробей k, их сумма равна $\frac{k}{2}$, а среднее арифметическое равно $\frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$

Задача 10. Известно, что уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$ (где $N-$ некоторое фиксированное натуральное число) имеет в натуральных числах x, y ровно 777 решений. Сколько решений в натуральных числах x, y имеет уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$?

Решение. Приведем уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$ к виду $(N-x)(y+N) = N^2$, а уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N}-$ к виду $(x-N)(y-N) = N^2$.

В левой части первого равенства одна из скобок положительна, значит и вторая тоже. В левой части второго равенства также обе скобки положительны, потому что $\frac{1}{x} < \frac{1}{N}$, а значит $x > N$.

Пусть $N^2 = KL$ — произвольное представление числа N^2 в виде произведения двух натуральных чисел, причем $K \leqslant L$.

Случай 1. $K = L = N$. Такая пара чисел K, L не дает решений уравнения (1) (поскольку в левой части уравнения (1) первая скобка строго меньше N, а вторая скобка строго больше N), но в то же время дает одно решение $(x = 2N, y = 2N)$ уравнения (2).

Случай 2. $K < N$ и $L > N$. Такая пара чисел K, L дает одно решение ($x = N-K, y = L-N$) уравнения (1) и два решения ($x = N+K, y = N+L$ и $x = N+L, y = N+K$) уравнения (2).

Значит, количество M_1 решений уравнения (1) и количество M_2 решений уравнения (2) связаны равенством $M_2 = 2M_1 + 1$. Раз $M_2 = 777$, то $M_1 = \frac{M_2-1}{2} = \frac{777-1}{2} = 388$.

Ответ. 388

Задача 11. У каждого составного числа от 1 до 100 нашли наименьший простой делитель. Найдите сумму обратных величин всех этих делителей.
Решение. Для составных чисел от 1 до 100 наименьший простой делитель может быть только $2, 3, 5$ или 7, так как $11^2 = 121 > 100$.
Числа с наименьшим делителем 2: все четные составные числа от 4 до 100, их количество 49, вклад в сумму $\frac{49}{2}$. Числа с наименьшим делителем 3: нечетные составные числа, кратные 3 (исключая простое число 3), их количество 16, вклад $\frac{16}{3}$. Числа с наименьшим делителем 5: числа, кратные 5, но не кратные 2 или 3 (исключая простое число 5), их количество 6, вклад $\frac{6}{5}$. Числа с наименьшим делителем 7: числа, кратные 7, но не кратные 2, 3 или 5 (исключая простое число 7), их количество 3, вклад $\frac{3}{7}$. Сумма обратных величин: $\frac{49}{2} + \frac{16}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{7} = \frac{5145+1120+252+90}{210} = \frac{6607}{210}$.
Ответ. $6607/210 = 31 \quad 97/210$

Задача 12. Найдите сумму дробей $\frac{k}{k^4+k^2+1}$ по всем k от 0 до 100.
Решение. $\frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{k}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)} = \frac{1}{2(k^2-k+1)} - \frac{1}{2(k^2+k+1)} = \frac{1}{2(k^2-k+1)} - \frac{1}{2((k+1)^2-(k+1)+1)}$ При сложении таких разностей все промежуточные слагаемые сократятся, и останется $1/2 - 1/2 \cdot 1/10101 = 5050/10101$.
Ответ. $5050/10101$

Задача 13. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 2020$. Какое наименьшее количество чисел надо стереть, чтобы для любых двух оставшихся чисел a и b сумма $a + b$ не делилась на $a - b$?
Решение. Среди любых трех подряд идущих чисел можно оставить не больше одного, т.к. нельзя оставлять пару чисел с разностью 1 или 2 : $a + (a+1)\vdots 1$ и $a + (a+2)\vdots 2$. Поэтому из $2020 = 673 \cdot 3 + 1$ подряд идущих чисел надо убрать не меньше $673 \cdot 2 = 1346$ чисел.
Если оставить только числа, дающие остаток 1 при делении на 3 , то столько чисел и будет убрано. Рассмотрим произвольную пару оставшихся чисел. Их разность делится на 3 , а сумма не делится, поэтому их сумма не делится на их разность. Следовательно, такой пример удовлетворяет условию.
Ответ. 1346

Задача 14. Назовем последовательность из 50 натуральных чисел с суммой 100 хорошей, если из нее нельзя выбрать несколько подряд идущих чисел с суммой 50 . Найдите количество таких последовательностей.
Решение. Рассмотрим хорошую последовательность. Поставим между соседними числами запятые. Представим каждое число в виде суммы единиц, т. е., например, вместо 3 напишем $1+1+1$. Получим строчку из ста единиц, между соседними единицами стоит плюс или запятая. Например, из последовательности $3, 1, 4$ получится $1 + 1 + 1{,}1{,}1 + 1 + 1 + 1$. Всего знаков (плюсов и запятых) 99, из них 49 запятых. Пронумеруем эти знаки от 1 до 99. Разобьем их на пары $1-51, 2-52, 3-53, \ldots, 49-99$; без пары останется знак с номером 50. Знак с номером 50 не запятая, т.к. тогда можно было бы выбрать до этой запятой все числа, их сумма как раз равна 50. В парах не могут оба знака быть запятыми — иначе можно выбрать все числа между ними, их сумма равна 50. Всего запятых ровно 49, значит в каждой паре ровно одна запятая. Поэтому количество хороших последовательностей равно количеству способов выбрать из этих 49 пар по одному знаку, который будет запятой.
Ответ. 2^{49}.

Задача 15. Даны k палочек, длина каждой — натуральное число, при этом нет двух одинаковых по длине палочек. Известно, что из любых трех палочек можно составить треугольник периметра не больше 1000. Каково наибольшее возможное значение k?
Решение. *Пример.* Возьмем палочки $167, 168, \ldots, 332, 333, 334$.
Докажем оценку. Пусть две самые маленькие палочки $a, b (a < b)$, три самые большие — $x, y, z (x < y < z)$. Если $b \leqslant 168$, то из рассмотрения треугольника со сторонами a, b, z можно сделать вывод, что $z - b < a \leqslant 167$. Количество палочек, длина которых между b и z, не превышает $z - b - 1$. Значит, всего палочек не больше $z - b - 1 + 3 \leqslant 166 - 1 + 3 = 168$.
В противном случае $b \geqslant 169$. Если $x \geqslant 333$, то $x + y + z \geqslant 333 + 334 + 335 = 1002$, т.е. периметр треугольника со сторонами x, y, z слишком большой. Значит, $x \leqslant 332$. Количество палочек, длина которых между b и x, не превышает $x - b - 1$. Значит, всего палочек не больше $x - b - 1 + 5 \leqslant 332 - 169 - 1 + 5 = 167$. Итак, в любом случае палочек не больше 168.
Ответ. 168

Задача 16. Все девятизначные числа с различными ненулевыми цифрами расположили в порядке возрастания. Какие два числа стоят в середине этой последовательности?
Решение. Общее количество чисел равно $9! = 362880$. Поскольку это число чётное, средними являются два числа с порядковыми номерами 181440 и 181441.

Числа с первой цифрой $1, 2, 3$ или 4 занимают позиции с 1 по $4 \cdot 8! = 161280$. Числа с первой цифрой 5 занимают позиции с 161281 по 201600. Таким образом, искомые позиции 181440 и 181441 попадают в группу чисел с первой цифрой 5. Относительная позиция в этой группе: $181440 - 161280 = 20160$. Количество чисел с фиксированной второй цифрой в группе с первой цифрой 5 равно $7! = 5040$. Группы по второй цифре (доступные цифры: $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$) занимают относительные позиции: вторая цифра 1: 1-5040, вторая цифра 2: 5041-10080, вторая цифра 3: 10081-15120, вторая цифра 4: 15121-20160.

Позиция 20160 соответствует последнему числу в группе с второй цифрой 4. Это число имеет первую цифру 5, вторую цифру 4, а оставшиеся цифры $(1, 2, 3, 6, 7, 8, 9)$ расположены в убывающем порядке: 9, 8, 7, 6, 3, 2, 1. Таким образом, число на позиции $181440 - 549876321$.

Число на позиции 181441 является первым в группе с второй цифрой 6. Оно имеет первую цифру 5, вторую цифру 6 , а оставшиеся цифры $(1, 2, 3, 4, 7, 8, 9)$ расположены в возрастающем порядке: $1, 2, 3, 4, 7, 8, 9$. Таким образом, число на позиции $181441 - 561234789$.
Ответ. 549876321 и 561234789

Задача 17. Для целых чисел a, b и c верно равенство $a + 2b = 3b + 4c = 5c + 6a$. Найдите наименьшее натуральное значение $a + b + c$ кратное 2025.
Решение. Докажем, что $a+b+c$ кратно 35. Заметим, что $a = 13t, b = 25t, c = -3t$. Действительно, из первого равенства получаем $a = b+4c$, а из второго $3b = c+6a$. Подставим a: $3b = c+6(b+4c) = 6b+25c$; $b = -25/3$. Если $c = -3t$, то $b = 25t$ и $a = 25t - 12t = 13t$.
Получаем ответ $([100000/35] + 1) \cdot 35 = 100030$.
Ответ. 14175

Задача 18. Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие равенству
$x^2 = y^2\left(x + y^4 + 2y^2\right)$.
Решение. Так как x^2 делится на y^2, x делится на y. Подставляя в уравнение из условия $x = zy$, после преобразований получаем $z^2 - zy - y^4 - 2y^2 = 0$. Дискриминант последнего уравнения равен $4y^4 + 9y^2 = y^2\left(4y^2 + 9\right)$. Так как число z целое, $4y^2 + 9$ должно быть точным квадратом. $4y^2 + 9 = t^2 \Leftrightarrow (t - 2y)(t + 2y) = 9$, откуда, так как $t - 2y < t + 2y$, получаем $t - 2y = 1, t + 2y = 9$, то есть $y = 2$. Подставляя найденное значение y в уравнение из условия и решая полученное квадратное уравнение, получаем $x = 12$.
Ответ. $x = 12, y = 2$

Задача 19. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $x^2 + xy + y^2 = x + 20$.
Решение. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно переменной $x : x^2 + (y-1)x + (y^2 - 20) = 0$. Его дискриминант $D = (y-1)^2 - 4\left(y^2 - 20\right) = 81 - 2y - 3y^2$ должен быть неотрицательным, то есть $3y^2 + 2y - 81 \leqslant 0$. Это неравенство выполняется при $y \in \left[\frac{-1-2\sqrt{61}}{3}; \frac{-1+2\sqrt{61}}{3}\right]$. В этом промежутке десять целых y от -5 до 4 . Поскольку нужно найти пары целых чисел, то дискриминант D должен быть полным квадратом. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это будет при $y = -5; 0; 4$. - 1) Если $y = -5$, то $D = 16$ и получим уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$, имеющее целые корни 1 и 5 , и значит, найдены две пары целых чисел ($1; -5$) и ($5; -5$). - 2) Если $y = 0$, то $D = 81$ и получим уравнение $x^2 - x - 20 = 0$, имеющее целые корни -4 и 5 , и значит, найдены две пары целых чисел ($-4; 0$) и ($5; 0$). - 3) Если $y = 4$, то $D = 25$ и получим уравнение $x^2 + 3x - 4 = 0$, имеющее целые корни -4 и 1 , и значит, найдены две пары целых чисел ($-4; 4$) и ($1; 4$). Таким образом, данному уравнению удовлетворяют шесть пар целых чисел: $(1; -5)$, $(5; -5)$,$(-4; 0)$,$(5; 0)$,$(-4; 4)$ и $(1; 4)$.
Ответ. $(1; -5)$,$(5; -5)$,$(-4; 0)$,$(5; 0)$,$(-4; 4)$, $(1; 4)$.

Задача 20. Найдите минимум выражения: $\sqrt{(x-4)^2 + (x+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (x-3)^2}$.
Решение. Заметим, что это сумма расстояний от точки $P(x, x)$ на прямой $y = x$ до точек $A(4, -1)$ и $B(-2{,}3)$: $PA = \sqrt{(x-4)^2 + (x+1)^2}, \quad PB = \sqrt{(x+2)^2 + (x-3)^2}$. По неравенству треугольника, сумма расстояний $PA + PB$ минимальна, когда точка P лежит на отрезке AB. Прямая AB пересекает прямую $y = x$ в точке $P(1{,}1)$, что проверяется подстановкой в параметрическое уравнение

прямой AB: $(4,-1)+t(-6{,}4)=(4-6t,-1+4t)$, при $-1+4t=4-6t\Rightarrow t=0{,}5\Rightarrow P(1{,}1)$. Таким образом, минимум достигается при $x=1$: $f(1)=\sqrt{(1-4)^2+(1+1)^2}+\sqrt{(1+2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{9+4}+\sqrt{9+4}=\sqrt{13}+\sqrt{13}=2\sqrt{13}$.
Ответ. $2\sqrt{13}$

Задача 21. Назовём число *красивым*, если оно получается выписыванием друг за другом слева направо по возрастанию пяти последовательных трёхзначных чисел. Сколько красивых чисел делятся на 46?
Решение. Красивое число представимо в виде $\overline{abc}\cdot 1001001001001+1002003004$, где $\overline{abc}<1000-4=996$. Множитель 1001001001001 не делится на 46, а 1002003004 делится. Значит, красивых чисел столько же, сколько трёхзначных чисел кратных 46, а их $[900/46]=19$ (наибольшее трёхзначное кратное 46 равно $[999/46]\cdot 46=966$).
Ответ. 19

Задача 22. Из четырех различных ненулевых цифр составили все возможные четырехзначные числа. Сумма некоторых семи из них равна 10578. Найдите сумму остальных чисел.
Решение. Лемма: Сумма всех возможных n-значных чисел, составленных из различных ненулевых цифр $a_1,\dots a_n$ равна $(a_1+a_2+\dots+a_n)\cdot x\cdot(n-1)!$, где x — число вида $11\dots1$ — состоящее из n единиц.

Доказательство: Будем суммировать числа поразрядно. В разряде единиц каждая цифра встретится $(n-1)$! раз, значит, сумма разрядов единиц всех чисел равна $(a_1+a_2+\dots+a_n)\,(n-1)!$. Аналогичное рассуждение верно и для остальных разрядов, откуда общая сумма равна $(a_1+a_2+\dots+a_n)\cdot(n-1)!\cdot(1+10+\dots+10^{n-1})$.

Заметим, что число 10578 дает остаток 3 при делении на 9. Так как остаток числа при делении на 9 равен остатку его суммы цифр при делении на 9 , то у всех четырехзначных чисел были одинаковые остатки при делении на 9 равные 3 . Тогда сумма цифр могла быть равна 12 или 21 и более. Пусть сумма цифр была хотя бы 21. Оценим минимальную сумма таких чисел. Если среди цифр не встречается цифра 1, то каждое четырехзначное число начинается хотя бы с 2 , и тогда сумма 7 из них не менее чем 14000. Среди семи выбранных чисел есть максимум 6 чисел, начинающихся с 1 , и хотя бы одно с 2 или более. В случае если менее 6 чисел начинаются с 1 , сумма чисел будет больше. Сумма 6 чисел, начинающихся с 1 и получаемых всеми перестановками трех оставшихся цифр, согласно лемме, равна $6000+(S-1)\cdot 111\cdot 2$, где S - сумма цифр. Если $S\geqslant 21$, то сумма 6 таких чисел не менее 10440 , а вместе с числом, начинающимся с 2 или более, будет больше 12000. Значит сумма цифр могла быть равна только 12, тогда по лемме, сумма всех четырехзначных чисел будет $6\cdot 1111\cdot 12=79992$. Откуда ответ: $79992-10578=69414$.
Ответ. 69414

Задача 23. В числе 21231221 содержится 3 цифры 1, 4 цифры 2 и 1 цифра 3. Убрав из подчёркнутой фразы все слова, мы получим число 314213. Будем говорить, что число 314213 является описанием числа 21231221. Найдите минимальное число, не содержащее нулей, которое является описанием самого себя. (Составляя описание, мы сначала пишем про единицы, потом про двойки и т.д.)
Решение. Предположим, что существует число из $2n$ цифр, которое является описанием самого себя и меньше указанного в ответе. По условию цифры на чётных местах в нём равны $1,2,\dots,n$. Цифры на нечётных местах должны быть из этого же набора. При этом они указывают количество следующих за ними цифр в числе, поэтому их сумма равна $2n$. Докажем, что $n\leqslant 4$. Предположим, что это не так, и рассмотрим три случая.
1) $n=1$. Тогда первой цифрой должна быть двойка, но число может состоять только из единиц. Противоречие.
2) $n=2$. Тогда первой и третьей цифрами могут быть только двойки, но число 2122 не является описанием самого себя.
3) $n=3$. Тогда цифры на нечётных местах — либо $1,2,3$ в некотором порядке, либо три двойки. Но описания таких чисел имеют другой вид: 212223 и 114213 соответственно.
Теперь будем строить наименьшее возможное восьмизначное число. На первом месте не может стоять цифра 1 , иначе будет уже две единицы, поэтому поставим на это место двойку. В числе уже есть две двойки, поэтому цифра на третьем месте не меньше 2. Но и цифры 2 там быть не может, иначе будет уже три двойки. Ставим на это место тройку, после чего остальные цифры расставляются однозначно.
Ответ. 21322314

Задача 24. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат. Найти все такие числа.
Решение. Пусть дано число $10a+b$, где $a, b-$ цифры, $a \geqslant 1$. Обратное число: $10b+a$. Их сумма: $11(a+b)$. Это квадрат, значит $a+b=11$ (так как $11 \cdot 11=121=11^2$, а $a+b \leqslant 18$). Все пары (a, b) с $a+b=11$: (2,9),(3,8),(4,7),(5,6),(6,5),(7,4),(8,3),(9,2).
Ответ. 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92

Задача 25. Каждый из 12 человек — рыцарь или лжец. Первый сказал: «Число лжецов среди нас делится на 1 », второй: «Число лжецов среди нас делится на 2 », ..., двенадцатый: «Число лжецов среди нас делится на 12». Сколько среди них может быть рыцарей?
Решение. Пусть среди них $L>0$ лжецов и $12-L$ рыцарей. Тогда правду говорили те и только те, чей номер (и, значит, упомянутый делитель) является делителем числа L. Это значит, что количество делителей L равно 12 - L. Это свойство выполняется для $L=9$ (три делителя: 1,3 и 9) и $L=8$ (четыре делителя: 1,2,4,8). Отсюда получаем два варианта ответа. Ещё один вариант - 0 лжецов.
Ответ. 3, 4 или 12

Задача 26. В квадрате 81×81 Катя загадала одну клетку. Ваня пытается отгадать, какую. За один вопрос он указывает на одну из клеток, после чего Катя отвечает, что он угадал (если Ваня угадал, конечно), «Горячо» (если клетка Вани граничит с загаданной по стороне или по углу) или «Холодно» во всех остальных случаях. За какое число вопросов Ваня гарантированно определит клетку (т.е. будет знать её местоположение)?
Решение. Ваня проверяет все клетки с координатами $(3i-1; 3j-1)$ для $i, j=1,2, \ldots, 27$ (всего $27 \times 27=729$ клеток). В худшем случае он получит «Холодно» на первых 728 вопросах, а на 729-м — «Горячо», что означает, что загаданная клетка находится в 3×3 квадрате вокруг последней проверенной клетки. Для определения точной клетки в этом квадрате достаточно 2 дополнительных вопросов (так как $3^2=9$), итого $729+2=731$. Меньшее число вопросов не гарантирует определение клетки, так как $27^2=729$ — минимальное число клеток, которые нужно проверить, чтобы покрыть всю сетку неперекрывающимися 3×3 квадратами, а для каждого такого квадрата требуется минимум 2 вопроса для точного определения.
Ответ. 731

Задача 27. Найдите все такие натуральные числа n, для которых верны не менее двух из трёх следующих утверждений: 1) $n-86$ является квадратом натурального числа; 2) $n-39$ делится на 10 ; 3) $n+3$ является квадратом натурального числа.
Решение. Если верно второе утверждение, то n заканчивается на 9. Тогда $n-86$ заканчивается на 3 , а $n+3$ - на 2 . Однако точные квадраты не оканчиваются ни на 3 , ни на 2 , поэтому в этом случае верно только одно утверждение, что противоречит условию. Следовательно, верны первое и третье утверждения. Обозначим $n-86=x^2, n+3=y^2$. Вычитая из второго равенства первое и применяя формулу разности квадратов, получим $(y-x)(y+x)=89$. Так как $89-$ простое число, то единственным его представлением в виде произведения двух натуральных чисел является $1 \cdot 89$. Значит, $y-x=1, y+x=89$, откуда $x=44$, $y=45$ и $n=45^2-3=2022$.
Ответ. 2022

Задача 28. В наборе 27 гирек, массы которых равны 1 г, 2 г, ..., 27 г. Каждая гирька сделана либо из алюминия, либо из железа, либо из меди, при этом средняя масса алюминиевых гирек равна 15 г, железных — 3 г, а медных — 18 г. Сколько алюминиевых гирек может быть в наборе?
Решение. Обозначим количество алюминиевых гирек через x, железных — через y, медных - через z. Тогда суммарная масса алюминиевых гирек равна $15x$ г, железных - $3y$ г, медных - $18z$ г, а так как сумма масс всех гирек набора равна $1+2+\ldots+27=378$ г, то $15x+3y+18z=378$. Сократив последнее равенство на 3 , получим $5x+y+6z=126$. Кроме того, умножив равенство $x+y+z=27$ на 5 , получим $5x+5y+5z=135$. Из этих двух равенств следует, что $4y-z=9$. Значит, $y \geqslant 3$. С другой стороны, если бы железных гирек было не менее шести, то их средняя масса была бы не меньше 3,5 г, что противоречит условию, поэтому $y \leqslant 5$. Таким образом, возможны три случая. 1) $y=3, z=4 \cdot 3-9=3, x=27-3-3=21$. Подходит, например, вариант, когда массы железных гирек равны 2 г, 3 г, 4 г, медных — 17 г, 18 г, 19 г, а все остальные гирьки алюминиевые. 2) $y=4, z=4 \cdot 4-9=7, x=27-4-7=16$. Массы железных гирек могут быть равны 1 г, 2 г, 4 г, 5 г, медных — 15 г, 16 г, ..., 21 г, а все остальные гирьки алюминиевые. 3) $y=5, z=4 \cdot 5-9=11, x=27-5-11=11$.

Массы железных гирек могут быть равны 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г, медных - 13 г, 14 г, …, 23 г, а все остальные гирьки алюминиевые.
Ответ. 11, 16 или 21

Задача 29. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.
Решение. Пусть m - наибольший делитель числа N, меньший, чем N. Тогда $n = mp$, где p - наименьший простой делитель числа N. Имеем $m(p+1) = N + m = 10^k$. Число в правой части не делится на 3, поэтому $p > 2$. Отсюда следует, что N нечётно, а тогда и m нечётно. Поскольку 10^k делится на $m, m = 5^s$. Если $m = 1$, то $N = p = 10^k - 1$, что невозможно, так как $10^k - 1$ делится на 9, то есть не является простым. Значит, $s \geqslant 1$, число N кратно 5, и потому $p \leqslant 5$. Если $p = 3$, то $4 \cdot 5^s = 10^k$, откуда $k = 2, m = 25$ и $N = 75$. Если же $p = 5$, то $p + 1 = 6$, и число 10^k делится на 3, что невозможно.
Ответ. 75

Задача 30. Вася расставил вдоль окружности цифры 3 и 7, при этом семёрок вдвое больше, чем троек. Затем, обходя окружность по часовой стрелке, Вася выписал на листок все двузначные числа из соседних цифр. Оказалось, что составных чисел он выписал втрое больше, чем простых. Чему равна наименьшая возможная сумма расставленных Васей на окружности цифр?
Решение. Так как семёрок вдвое больше, чем троек, то общее количество цифр на окружности кратно 3. Они разбиваются на группы подряд идущих одинаковых цифр. Двузначное число, стоящее на стыке двух групп, равно 37 или 73 , то есть в любом случае простое, а целиком попадающее в одну группу - составное, поскольку равно 33 или 77. При обходе окружности по часовой стрелке переходов от групп с тройками к группам семёрок столько же, сколько и от семёрок к тройкам. Значит, простых чисел Вася выписал чётное количество, а составных при этом в 3 раза больше, поэтому общее количество выписанных чисел делится на 8 . Но двузначных чисел столько же, сколько и цифр, поэтому количество цифр тоже кратно 8 . Следовательно, цифр на окружности не меньше 24 , из них троек не меньше восьми, а семёрок - не меньше 16. Пример с 24 цифрами легко строится: 373733333377777777777777 , сумма цифр при этом равна $3 \cdot 8 + 7 \cdot 16 = 136$.
Ответ. 136

Задача 31. Найдите все натуральные числа n, при которых число $5^n - 1$ является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.
Решение. Так как произведение пяти и более последовательных натуральных чисел делится на 5 , а число $5^n - 1$ не делится на 5 , то $5^n - 1$ является произведением двух или четырех последовательных натуральных чисел. Пусть $5^n - 1 = k(k+1)$. Перебирая остатки по модулю 5, получаем, что $k(k+1)$ не может быть сравнимо с -1 по модулю 5 . Пусть $5^n - 1 = k(k+1)(k+2)(k+3)$. Тогда $5^n = k(k+1)(k+2)(k+3) + 1 = \left(k^2 + 3k + 1\right)^2$. Отсюда $n = 2m$ - четно, и $5^m = k^2 + 3k + 1$. Рассмотрим это равенство как квадратное уравнение относительно k. Его дискриминант $D = 5 + 4 \cdot 5^m = 5\left(1 + 4 \cdot 5^{m-1}\right)$ при $m > 1$ делится на 5, но не делится на 25 и потому не является полным квадратом. При $m = 1, D = 9$, и мы получаем ответ.
Ответ. 2

Задача 32. Для натурального числа $n > 1$ обозначим $L(n)$ наибольший натуральный делитель числа n, который не равен n. Например, $L(12) = 6$, $L(5) = 1$. Положим также $L(1) = L(0) = 0$. Приведите пример $A > 100$, что уравнение имеет хотя бы 2 решения:

$$n + L(n) + L(L(n)) + \cdots + \underbrace{L(\ldots L(n) \ldots)}_{n \text{ раз}} = A.$$

Решение. 90 $\quad 90+45+15+5+1 = 156$, 80 $\quad 80+40+20+10+5+1 = 156$; 124 $\quad 124+62+31+1 = 218$, 126 $\quad 126+63+21+7+1 = 218$. Есть и другие примеры.
Ответ. 156, 218 и другие (одно из чисел)