Математическая игра «7 Чудес». 10-11 классы

Задача 1. На доску последовательно выписали все числа от 2025 до 202500: 202520262027 ... 202499202500. Сколько раз в это последовательности встретилось число 1812?

Задача 2. Найдите такое наименьшее натуральное N, что числа от 3 до N можно разбить на непересекающиеся группы так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме остальных чисел этой группы.

Задача 3. Назовём четырёхзначное число $\overline{abcd}$ любопытным, если сумма двузначных чисел $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ равна двузначному числу $\overline{bc}$. Например, число 1978 любопытное, так как $19 + 78 = 97$. Найти количество любопытных чисел.

Задача 4. Каких (и на сколько) натуральных чисел больше: 10-значных с суммой цифр 9 или 9-значных с суммой цифр 10?

Задача 5. Есть два выпуклых многоугольника. У первого многоугольника вдвое больше острых углов, чем у второго тупых, а у второго втрое больше острых углов, чем у первого тупых. Также известно, что у каждого из них есть хотя бы один острый угол и что у этих многоугольников (одного или обоих) есть еще и прямые углы.Сколько прямых углов у каждого из многоугольников?

Задача 6. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы углов A и B обратно пропорциональны противолежащим сторонам. Найдите угол C.

Задача 7. Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, Y, расстояние между которыми тоже равно 1 . Из точки C одной окружности проведены к другой касательные CA, CB, вторично пересекающие первую окружность в точках B', A'. Прямые AA' и BB' пересекаются в точке Z. Найдите угол XZY.

Задача 8. Дан выпуклый n-угольник $A_1 \ldots A_n$. Пусть $P_i (i = 1, \ldots, n)$ — такая точка на его границе, что прямая A_iP_i делит его площадь пополам. Дано, что все точки P_i не совпадают с вершинами и лежат на k сторонах n-угольника. Каково наименьшее и наибольшее возможное значение k при каждом данном n?

Задача 9. Выпишем по возрастанию все положительные несократимые дроби, меньшие 1, знаменатели которых меняются от 2 до 2018 . Чему равно среднее арифметическое этих дробей?

Задача 10. Известно, что уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$ (где N— некоторое фиксированное натуральное число) имеет в натуральных числах x, y ровно 777 решений. Сколько решений в натуральных числах x, y имеет уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$?

Задача 11. У каждого составного числа от 1 до 100 нашли наименьший простой делитель. Найдите сумму обратных величин всех этих делителей.

Задача 12. Найдите сумму дробей $\frac{k}{k^4+k^2+1}$ по всем k от 0 до 100.

Задача 13. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 2020$. Какое наименьшее количество чисел надо стереть, чтобы для любых двух оставшихся чисел a и b сумма $a + b$ не делилась на $a - b$?

Задача 14. Назовем последовательность из 50 натуральных чисел с суммой 100 хорошей, если из нее нельзя выбрать несколько подряд идущих чисел с суммой 50 . Найдите количество таких последовательностей.

Задача 15. Даны k палочек, длина каждой — натуральное число, при этом нет двух одинаковых по длине палочек. Известно, что из любых трех палочек можно составить треугольник периметра не больше 1000. Каково наибольшее возможное значение k?

Задача 16. Все девятизначные числа с различными ненулевыми цифрами расположили в порядке возрастания. Какие два числа стоят в середине этой последовательности?

Задача 17. Для целых чисел a, b и c верно равенство $a + 2b = 3b + 4c = 5c + 6a$. Найдите наименьшее натуральное значение $a+b+c$ кратное 2025.

Задача 18. Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие равенству $x^2 = y^2\left(x + y^4 + 2y^2\right)$.

Задача 19. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $x^2 + xy + y^2 = x + 20$.

Задача 20. Найдите минимум выражения: $\sqrt{(x-4)^2 + (x+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (x-3)^2}$.

Задача 21. Назовём число *красивым*, если оно получается выписыванием друг за другом слева направо по возрастанию пяти последовательных трёхзначных чисел. Сколько красивых чисел делятся на 46?

Задача 22. Из четырех различных ненулевых цифр составили все возможные четырехзначные числа. Сумма некоторых семи из них равна 10578. Найдите сумму остальных чисел.

Задача 23. В числе 21231221 содержится 3 цифры 1, 4 цифры 2 и 1 цифра 3. Убрав из подчёркнутой фразы все слова, мы получим число 314213. Будем говорить, что число 314213 является описанием числа 21231221. Найдите минимальное число, не содержащее нулей, которое является описанием самого себя. (Составляя описание, мы сначала пишем про единицы, потом про двойки и т.д.)

Задача 24. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат. Найти все такие числа.

Задача 25. Каждый из 12 человек — рыцарь или лжец. Первый сказал: «Число лжецов среди нас делится на 1 », второй: «Число лжецов среди нас делится на 2 », ..., двенадцатый: «Число лжецов среди нас делится на 12». Сколько среди них может быть рыцарей?

Задача 26. В квадрате 81×81 Катя загадала одну клетку. Ваня пытается отгадать, какую. За один вопрос он указывает на одну из клеток, после чего Катя отвечает, что он угадал (если Ваня угадал, конечно), «Горячо» (если клетка Вани граничит с загаданной по стороне или по углу) или «Холодно» во всех остальных случаях. За какое число вопросов Ваня гарантированно определит клетку (т.е. будет знать её местоположение)?

Задача 27. Найдите все такие натуральные числа n, для которых верны не менее двух из трёх следующих утверждений:
1) $n - 86$ является квадратом натурального числа;
2) $n - 39$ делится на 10 ;
3) $n + 3$ является квадратом натурального числа.

Задача 28. В наборе 27 гирек, массы которых равны 1 г, 2 г, ..., 27 г. Каждая гирька сделана либо из алюминия, либо из железа, либо из меди, при этом средняя масса алюминиевых гирек равна 15 г, железных — 3 г, а медных — 18 г. Сколько алюминиевых гирек может быть в наборе?

Задача 29. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

Задача 30. Вася расставил вдоль окружности цифры 3 и 7, при этом семёрок вдвое больше, чем троек. Затем, обходя окружность по часовой стрелке, Вася выписал на листок все двузначные числа из соседних цифр. Оказалось, что составных чисел он выписал втрое больше, чем простых. Чему равна наименьшая возможная сумма расставленных Васей на окружности цифр?

Задача 31. Найдите все натуральные числа n, при которых число $5^n - 1$ является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.

Задача 32. Для натурального числа $n > 1$ обозначим $L(n)$ наибольший натуральный делитель числа n, который не равен n. Например, $L(12) = 6$, $L(5) = 1$. Положим также $L(1) = L(0) = 0$. Приведите пример $A > 100$, что уравнение имеет хотя бы 2 решения:

$$n + L(n) + L(L(n)) + \cdots + \underbrace{L(\ldots L(n)\ldots)}_{n\text{ раз}} = A.$$