Математическая игра «7 Чудес». 7–8 классы.
Решения и ответы

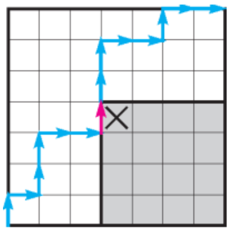
Задача 1. Сколько существует 6-значных чисел, у которых по три чётные и три нечётные цифры?
Решение. На первое место можно поставить любую из 9 ненулевых цифр. Из оставшихся 5 мест выберем два ($5 \cdot 4 : 2 = 10$ способов). На эти два места поставим цифры той же чётности, что и первая (5^2 способов), на остальные три места — цифры другой чётности (5^3 способов). Итого, $9 \cdot 10 \cdot 5^5 = 281250$.
Ответ. 281250

Задача 2. Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, которые остаются палиндромами, после прибавления к ним числа 11? Число-палиндром — это число, которое читается одинаково как справа налево, так и слева направо. Например, число 123 не является числом-палиндромом, а число 12321 — является.
Решение. Представим исходное пятизначное число как $n = \overline{abcba}$. Если первая цифра исходного числа будет меньше или равна восьми, то последней цифрой числа n окажется $a + 1$, а значит, и первая цифра числа $n + 11$ должна оказаться равна $a + 1$, иначе число $n + 11$ не будет палиндромом. Такая ситуация возможна только при переносе единицы разряда, т. е. при $b = c = 9$. Тогда получается, что могут подходить только варианты вида $n = \overline{a999a}$, где $a < 9$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что каждый такой вариант подходит. Далее остаётся проверить вариант для $a = 9 : 99999 + 11 = 100010$, что не является палиндромом. Очевидно, что этот вариант не подходил бы и по другим соображениям: последняя цифра, равная девяти, увеличенная на 1, становится нулём на конце, а значит, и первая цифра числа должна оказаться равной нулю, что невозможно.
Ответ. 8

Задача 3. Дана доска 6×6. Сколькими способами ладья может дойти из левого нижнего в правый верхний угол так, чтобы все её ходя имели разную длину, и чтобы в её маршруте ходы вверх и вправо чередовались.
Решение. Сумма ходов по каждому направлению равна 5: либо 3 хода (5 и $1 + 4$ или $2 + 3$ — $2^3 = 8$ вариантов), либо 4 хода ($1 + 4$ и $2 + 3$ — $2^4 = 16$ вариантов), всего $8 + 16 = 24$.
Ответ. 24

Задача 4. Назовём число *красивым*, если оно получается выписыванием друг за другом слева направо по возрастанию пяти последовательных трёхзначных чисел. Сколько красивых чисел делятся на 23?
Решение. Красивое число представимо в виде $\overline{abc} \cdot 1001001001001 + 1002003004$, где $\overline{abc} < 1000 - 4 = 996$. Множитель 1001001001001 не делится на 23, а 1002003004 делится. Значит, красивых чисел столько же, сколько трёхзначных чисел кратных 23, а их $[900/23] = 39$ (наибольшее трёхзначное кратное 23 равно $[999/23] \cdot 23 = 989$).
Ответ. 39

Задача 5. Квадрат 21×21 разрезали ломаной, идущей по границам клеточек из левого нижнего угла в противоположный, смещаясь только вправо и вверх. Квадрат какого наибольшего размера гарантированно можно вырезать из одной из двух получившихся частей?



Решение. Квадрат 11×11 точно будет в одной из частей - в той, в которой окажется центральная клетка квадрата 21×21. При этом если разрез пройдет по границе центральной клетки, то квадрат 12×12 вырезать будет невозможно.
Данная задача лишь малая часть большого и интересного сюжета из статьи Егора Владимировича Бакаева «Мальчики, девочки, таблицы, графы...» в журнале «Квант»
https://kvant.mccme.ru/pdf/2015/2015-03.pdf
Ответ. 11×11

Задача 6. Нарисуйте на клетчатой бумаге четырехугольник с вершинами в узлах, длины сторон которого — различные простые числа.
Решение. Условию удовлетворяет, например, четырехугольник с вершинами в точках $A(-3{,}0)$, $B(0{,}4)$, $C(12, -1)$, $D(12, -8)$. Его стороны $AB = 5, BC = 13, CD = 7, DA = 17$.

Ответ. возможны и другие варианты ответов

Задача 7. Рассмотрим треугольник с вершинами в точках $(0;0)$, $(1;0)$, $(2;201)$. Сколько целых точек лежит внутри него?
Решение. Заметим, что его площадь равна $1 \cdot 203/2 = 100{,}5$. Легко проверить, что на его границе нет целых точек, кроме вершин. Тогда по формуле Пика получаем, что количество внутренних точек равно $100{,}5 - 3/2 + 1 = 100$.
Ответ. 100

Задача 8. Какое наименьшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы после стирания любой из отмеченных точек среди оставшихся точек можно было найти четыре вершины квадрата? Приведите пример.
Решение. *Пример.* Вершины двух клеточек на клетчатой плоскости, граничащих по общей вершине. *Оценка.* Четыре вершины квадрата должны быть отмечены в любом случае. Чтобы получить ещё один квадрат, надо добавить хотя бы две точки. Если добавить ровно две, можно получить только один новый квадрат, и оба квадрата разрушатся, если удалить любую из их общих точек.
Ответ. 7

Задача 9. Из города Непоймигде в город Тамгденадо ведут две дороги. Маша и её брат Петя ездят по ним на велосипедах. Когда Маша едет по первой дороге, а Петя по второй, Маша обгоняет его на 51 минуту, а если наоборот, то Петя приезжает раньше на 12 минут. Если они едут вместе по первой дороге, то Маша приезжает раньше на 15 минут. На сколько минут раньше приедет Маша, если они вместе поедут по второй дороге? (Скорости ребят могут быть непостоянными даже на протяжении одной дороги!)
Решение. На путь по первой дороге, а потом сразу по второй Маша затратит на $51 - 12 = 39$ минут меньше, чем Петя. Так что если они поедут вместе, то она приедет раньше тоже на 39 минут. Но на первой дороге она быстрее на 15 минут, значит, на второй – на $39 - 15 = 24$ минуты.
Ответ. на 24 минуты

Задача 10. Река течёт из города A в город B. В реке плавает щука, а по берегу реки ползает рак. Если рак выползет из города A навстречу щуке, которая одновременно выплывет из города B, то они встретятся через полтора часа. Если же, наоборот, щука выплывет из A, а рак одновременно выползет из B, то они встретятся через час. Через сколько времени они бы встретились, если бы течения в реке не было?
Решение. Обозначим скорость сближения рака и щуки через u, скорость течения реки через v, а расстояние между городами через s. Так как первый раз до встречи прошло больше времени, то щука плыла против течения. Значит, $u - v = s/1{,}5$ и $u + v = s$. Сложив эти два равенства, получим $2u = 2/3s + s = 5/3s$, откуда $s/u = 6/5$, т.е. без течения рак и щука встретились бы через 72 минуты.
Ответ. через 72 минуты

Задача 11. Лиза, Женя и мама гуляли по замкнутой парковой аллее длиной 600 метров. Известно, что скорость Лизы в два раза больше скорости мамы, а скорость Жени в пять раз больше скорости мамы. Лиза и Женя начали свою прогулку от скамейки, в то время как мама ещё до скамейки не дошла. На каком наименьшем положительном расстоянии от скамейки могла находиться мама, при котором все трое когда-нибудь бы встретились в одной точке?
Решение. За один полный проход тропинки мамой Лиза и Женя снова будут у скамейки, потому что пройдут, соответственно, пять и два полных проходов тропинки. Поэтому имеет смысл рассматривать встречи до первого полного прохода тропинки мамой. Пока мама проходит тропинку один раз целиком, она встречается 4 раза с Лизой и однажды с Женей. Для удобства обозначим скорость мамы за x м/мин, тогда скорость Лизы — $5x$ м/мин, а скорость Жени — $2x$ м/мин, а исходное расстояние между мамой и скамейкой за S метров. Найдём моменты времени встреч мамы с Лизой. Изначально расстояние между ними равнялось $600-S$ метров, а сближались они со скоростью $5x-x = 4x$. Расстояние между каждыми следующими встречами Лизы и мамы равнялось 600 метрам. Тогда в первый раз они встретились через $(600 - S)/4x$ минут, второй раз через $600/4 + (600 - S)/4x = (1200 - S)/4x$ минут, третий раз через $(1800 - S)/4x$ минут, четвёртый раз через $(2400 - S)/4x$ минут. Теперь найдём моменты времени встреч мамы с Женей. Изначально расстояние между ними равнялось $600 - S$ метров, а сближались они со скоростью $2x - x = x$. Тогда единственный раз они встретились через $(600 - S)/x$ минут. Далее приравнивая моменты встреч мамы и Лизы с моментами встреч мамы и Жени, находим возможные значения S:

1 случай: $(600-S)/4x=(600-S)/x$, $S=600$ м. 2 случай: $(1200-S)/4x=(600-S)/x$, $S=400$ м. 3 случай: $(1800-S)/4x=(600-S)/x$, $S=200$ м. 4 случай: $(2400-S)/4x=(600-S)/x$, $S=0$ м. Тогда наименьший подходящий положительный вариант — 200 метров.
Ответ. 200 м

Задача 12. Где-то в горах, возможно на разной высоте, расположены посёлки A, B и C. Дороги между ними идут вверх и вниз, а как именно – неизвестно. Антон идёт из A в B 40 минут, обратно – 60 минут, а расстояние от A до B равно 5 км. Расстояние от A до C равно 3 км, и Антон идёт из A в C 30 минут. А сколько времени он идёт обратно? Скорость Антона в гору всегда постоянна и под гору тоже, но между собой они могут быть не равны.
Решение. Путь от A до B и от B до A – это 5 км вверх и 5 км вниз, и его Антон проходит за $40+60=100$ минут. Значит, 1 км вверх и 1 км вниз он проходит за $100:5=20$ минут, а 3 км вверх и 3 км вниз – за $20\cdot 3=60$ минут. Так как в одну сторону Антон идёт 30 минут, то на путь обратно он тратит $60-30=30$ минут.
Ответ. 30 минут

Задача 13. С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её *неожиданной*, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четвёрка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок – по 10 пятерок, четвёрок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Сколько оценок были для него неожиданными?
Решение. Первой неожиданной оценкой будет последняя, полученная в первый раз. Второй неожиданной оценкой будет последняя, полученная во второй раз, и т. д. Значит, всего будет 10 неожиданных оценок.
Ответ. 10

Задача 14. Книга сшита из 12 одинаковых тетрадей. Каждая тетрадь состоит из нескольких двойных листов, вложенных друг в друга. Тетради книги сшиты последовательно друг за другом. Все страницы книги пронумерованы, начиная с 1. Сумма номеров четырех страниц одного из двойных листов четвертой тетради равна 338. Сколько страниц в этой книге?
Решение. Пусть в книге x страниц, следовательно, в каждой тетради $\frac{x}{12}$ страниц, в первых трех тетрадях $\frac{3x}{12}=\frac{x}{4}$ страниц, в первых четырех тетрадях $\frac{4x}{12}=\frac{x}{3}$ страниц. Номера первой и второй страницы четвёртой тетради будут $\frac{x}{4}+1$ и $\frac{x}{4}+2$, а предпоследней и последней страницы $\frac{x}{3}-1$ и $\frac{x}{3}$. Так как суммы номеров всех двойных листов для каждой из тетрадей одинаковы, то получим уравнение $\left(\frac{x}{4}+1\right)+\left(\frac{x}{4}+2\right)+\left(\frac{x}{3}-1\right)+\frac{x}{3}=338$, поэтому $x=288$.
Ответ. 288

Задача 15. В ряд стоят 20 мальчиков и 25 девочек в каком-то порядке. Каждого ребенка спросили, сколько слева от него стоит детей другого пола. Чему равна сумма чисел, названных детьми?
Решение. Рассмотрим произвольную пару «мальчик-девочка». Если мальчик стоит левее девочки, то девочка его посчитала, а он ее — нет. А если правее — то наоборот: он посчитал ее, а она его – нет. Таким образом, каждая пара посчитана либо только мальчиком этой пары, либо только девочкой, т.е. ровно один раз. А число таких пар — 500.
Ответ. 500

Задача 16. В однокруговом турнире по футболу все команды сыграли друг с другом, кроме «Зенита», которому осталось ещё сыграть несколько игр. На данный момент проведено 222 игры. В каком количестве игр принял участие «Зенит»?
Решение. Пусть в турнире участвовало $n+1$ команд. Тогда без участия «Зенита» было проведено $n\cdot(n-1):2$ игр. Допустим, что «Зенит» сыграл k игр, где $k<n$. Очевидно, что $n<22$, иначе команды даже без «Зенита» сыграют хотя бы $22\cdot 21:2=231$ игру. Также очевидно, что $n>20$, иначе, при $n=20$, команды сыграют максимум $21\cdot 20:2=210$ игр (даже с участием «Зенита»). Получается, $n=21$. Тогда без «Зенита» сейчас сыграно $21\cdot 20:2=210$ игр, значит, «Зенит» сыграл $222-210=12$ игр.
Ответ. 12 игр

Задача 17. Последовательность задана рекуррентным способом: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Сумма скольких первых членов последовательности равна 2026?
Решение. Вычислим первые члены последовательности: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = 0{,}5$, $a_6 = 0{,}5, a_7 = 1, a_8 = 2, \ldots$. Последовательность периодична с периодом 6: $1, 2, 2, 1, 0{,}5, 0{,}5$. Сумма одного периода: $1 + 2 + 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}5 = 7$. А $2026 = 7 \cdot 289 + 3$. Сумма первых 2 членов равна $1 + 2 = 3$. Общее количество членов: $6 \cdot 289 + 2 = 1736$.
Ответ. 1736

Задача 18. Произведение трёх последовательных натуральных чисел в 8 раз больше, чем их сумма. Чему равна сумма квадратов данных трёх чисел?
Решение. Пусть три последовательных положительных целых числа будут $a-1$, a, и $a+1$. Поскольку среднее значение равно a, сумма целых чисел равна $3a$. Таким образом, 8 умноженная на сумму, равна $24a$. Теперь мы знаем, что $a(a-1)(a+1) = 24a \Rightarrow (a-1)(a+1) = 24$, $a = 5$. Следовательно, сумма квадратов равна $4^2 + 5^2 + 6^2 = 77$.
Ответ. 77

Задача 19. Для целых чисел a, b и c верно равенство $a + 2b = 3b + 4c = 5c + 6a$. Найдите наименьшее шестизначное значение $a + b + c$.
Решение. Докажем, что $a+b+c$ кратно 35. Заметим, что $a = 13t, b = 25t, c = -3t$. Действительно, из первого равенства получаем $a = b+4c$, а из второго $3b = c+6a$. Подставим a: $3b = c+6(b+4c) = 6b+25c$; $b = -25/3$. Если $c = -3t$, то $b = 25t$ и $a = 25t - 12t = 13t$.
Получаем ответ $([100000/35] + 1) \cdot 35 = 100030$.
Ответ. 100030

Задача 20. На доске в ряд написаны три числа. Вася продолжает строчку вправо, дописывая ещё четыре. При этом каждое новое число равно сумме самого правого и третьего справа. Сумма всех семи чисел оказалась равна 2024. Найдите сумму исходных трёх и последнего числа.
Решение. Выпишем первые семь чисел: a, b, c, $a+c$, $a+b+c$, $a+b+2c$, $2a+b+3c$. Тогда сумма всех чисел равняется $6a + 4b + 8c = 2024$. Заметим, что искомая сумма $3a + 2b + 4c$ равняется половине суммы всех написанных чисел. Таким образом, ответ равен 1012.
Ответ. 1012

Задача 21. Сумма четырёхзначного числа и трёхзначного числа, полученного в результате вычёркивания из четырёхзначного числа одной цифры, равна 6033. Найдите сумму цифр четырёхзначного числа.
Решение. Обозначим исходное четырёхзначное число как $\overline{abcd}$. Тогда трёхзначное число может быть вида: $\overline{bcd}$, $\overline{acd}$, $\overline{abd}$ или $\overline{abc}$. Первые три случая не подходят из-за чётности последней цифры суммы из-за сложения двух одинаковых цифр d из разряда единиц. Остаётся рассмотреть единственный возможный случай: $\overline{abcd} + \overline{abc} = 6033$. Очевидно, что эту сумму можно представить как $11 \cdot \overline{abc} + \overline{d} = 6033$. Так как правая часть даёт остаток 5 при делении на 11, то $d = 5$, тогда $\overline{abc} = 548$. Получается, что исходное четырёхзначное число — 5485, сумма цифр которого равняется 22.
Ответ. 22

Задача 22. Антон выписал на доску числа от 1 до 2024. Боря под каждым из чисел написал сумму цифр этого числа. Далее между Бориными числами Витя, чередуя слева направо, расставил знаки вычитания и сложения, причём начал с минуса. Чему равно значение полученного выражения?
Решение. Для удобства введём функцию $S(n)$, которая возвращает сумму цифр числа n. Так, например, S(223) = 7. Исходное условие можно записать так: $\mathrm{S}(1) - \mathrm{S}(2) + \mathrm{S}(3) - \mathrm{S}(4) + \ldots + S(2021)$ - $S(2022) + S(2023) - S(2024)$. Перепишем исходное условие следующим образом:

$$S(1) + [S(3) - S(2)] + [S(5) - S(4)] + \ldots + [S(2021) - S(2020)] + [S(2023) - S(2022)] - S(2024)$$

Рассмотрим скобку $[S(n) - S(n-1)]$, где n — нечётное. Очевидно, такая разность равна 1 . Тогда $S(1) + [S(3) - S(2)] + [S(5) - S(4)] + \ldots + [S(2021) - S(2020)] + [S(2023) - S(2022)] - S(2024) = S(1) + 1011 - S(2024) = 1 + 1011 - 8 = 1004$.
Ответ. 1004

Задача 23. В четырехзначном числе Петя зачеркнул первую цифру и получил трехзначное число. Затем он разделил исходное число на это трехзначное и получил частное 3, а остаток 8 Чему равно исходное число? (Найдите все возможные числа.)
Решение. Пусть x — первая цифра, y — трехзначное число, полученное после зачеркивания первой цифры. Тогда $1000x + y = 3y + 8$, т.е. $500 = y + 4$ Отсюда, учитывая неравенства $0 < y < 1000$, получаем, что равен либо 1, либо 2 Тогда, соответственно, $y = 496$ или $y = 996$.
Ответ. 1496 и 2996

Задача 24. Первая цифра пятизначного натурального числа a равна 1 Если переставить единицу на последнее место, то полученное число будет на 5842 меньше утроенного числа a. Найти a.
Решение. $a = 10^4 + b$, где b — четырехзначное число. Число с переставленной цифрой равно $10b+1$. По условию $3a-(10b+1) = 5842 \Rightarrow 3(10^4+b)-10b-1 = 5842 \Rightarrow 7b = 24157$, $b = 3451$, $a = 13451$.
Ответ. 13451

Задача 25. На слёт «Юный Аквалангист» приехали несколько дайверов и аквалангистов (всего не больше 20 участников), причём оказалось, что все разного роста. Дайверы всегда говорят правду тем, кто ниже их по росту, и врут тем, кто выше их. Аквалангисты же, наоборот, врут более низким участникам и говорят правду более высоким. При знакомстве каждый участник подошел к каждому и сказал либо «Я выше тебя», либо «Я ниже». Фраза «Я ниже» прозвучала 20 раз. Прощаясь, каждый должен был снова подойти к каждому и сказать «Я выше и я дайвер». Если кто-то не мог так сказать, то он хлопал в ладоши. Раздалось 18 хлопков. Вычислите, сколько человек приехало на слёт, и расставьте их по росту.
Решение. Пусть общее количество человек равно n, и ровно z из них — аквалангисты. При знакомстве дайверы говорят всем «Я выше тебя», а аквалангисты всем «Я ниже». Каждый аквалангист сказал эту фразу всем, кроме себя, поэтому получаем $z(n-1) = 20$ По условию $n-1 < 20$, поэтому возможны варианты: $z = 2$, $n-1 = 10$; $z = 4$, $n-1 = 5$; $z = 5$, $n-1 = 4$ (большие z невозможны, поскольку $z \leqslant n$). Теперь изучим прощание. Когда дайвер обращается к тому, кто ниже его, он должен говорить правду, и фраза «Я выше и я дайвер» — правда. Когда к тому, кто выше, — должен лгать, и эта фраза является ложью (первая её часть ложна). Для аквалангиста эта фраза всегда ложна, поэтому он может сказать её каждому, кто ниже его, но не может сказать тому, кто выше его. Значит, все хлопки проделывают аквалангисты в отношении тех, кто выше их. Нетрудно видеть, что из трёх вариантов подходит только $z = 2$, $n = 11$ (иначе хлопков получается меньше 18). Из 11 человек аквалангисты должны быть самым низким и третьим с конца по росту — только тогда получается $10 + 8 = 18$ хлопков (в остальных случаях либо $10 + 9$, либо не более 17).
Ответ. 11 человек; при упорядочении роста по возрастанию: А Д А Д Д Д Д Д Д Д Д

Задача 26. Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел — первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.
Решение. Пусть $a > b$. Так как сумма, разность и произведение целые, то $a = kb$, тогда:

$$(a+b)+(a-b)+ab+\frac{a}{b} = 2a+ab+k = k\left(b^2+2b+1\right) = k(b+1)^2 = 153 = 9 \cdot 17$$

Ясно, что $(b+1)^2 = 9 \Rightarrow b = 2, k = 17$, откуда $a = 34$.
Ответ. 34 и 2

Задача 27. Про трёхзначное натуральное число n сделали пять утверждений:
(а) число чётное;
(б) произведение цифр нечётно;
(в) число состоит из подряд идущих цифр (в каком-то порядке);
(г) число делится на 13;
(д) сумма цифр равна 9.
Оказалось, что из этих утверждений ровно одно неверное. Найдите все такие n.
Решение. Если утверждение (б) верное, то число состоит только из нечётных цифр, а значит, оно не делится на 2 и не состоит из трёх последовательных цифр (среди них обязана быть чётная). Но

тогда есть два неверных утверждения, что противоречит условию. Следовательно, утверждение (б) неверно, а остальные верны. Тогда сумма трёх последовательных цифр равна 9, так что это цифры 2, 3, 4. Ещё это число чётное, поэтому заканчивается на 2 или 4. Этим условиям удовлетворяют числа 234, 324, 342 и 432, из которых на 13 делится только 234.
Ответ. 234

Задача 28. В Школе Рыцарей и Лжецов, в которой каждый ученик либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт, учатся k учеников ($k > 100$). Все они пронумерованы в журнале числами от 1 до k. Каждый из них сказал: «Число лжецов в нашей школе делится на мой номер». Приведите пример k, когда по данным ответам нельзя однозначно определить, сколько в школе лжецов, если известно, что хотя бы один лжец там есть.
Решение. Например, когда 105 учеников (99 лжецов и 6 рыцарей под номерами 1, 3, 9, 11, 33 и 99, либо 103 лжеца и 2 рыцаря под номерами 1 и 103); 159 учеников (144 лжеца и 15 рыцарей, либо 155 лжецов и 4 рыцаря под номерами 1, 5, 31 и 155, либо 153 лжеца и 6 рыцарей под номерами 1, 3, 9, 17, 51 и 153, либо 157 лжецов и 2 рыцаря), а также во многих других случаях, установить точное количество лжецов нельзя.
Ответ. 105, 159 и другие

Задача 29. Вова, Петя и Маша сидят за круглым столом и играют в устный счет. Игра состоит в том, что каждый, услышав «на ушко» от соседа справа число, умножает его на свое, заранее придуманное простое число, и сообщает результат соседу слева. Круг игры начинается с Вовы и заканчивается им, игра завершается после 3 кругов. Первое натуральное число сообщает Вове «на ушко» его бабушка. Вова объявляет всем последнее услышанное им число 86400 Какое число сообщила Вове бабушка, если все придуманные игроками числа были различными?
Решение. Разложим число 86400 на простые множители: $86400 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$. Пусть p, q и r различные простые числа, придуманные Петей, Машей и Вовой соответственно, а A — число, сообщенное бабушкой. Так как игра продолжалась 3 круга, то последнее, услышанное Вовой, число равно $A \cdot p^3 \cdot q^3 \cdot r^2$. Сравнивая его с числом $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, приходим к выводу, что $r = 5$, Петя и Маша придумали числа 2 и 3, а бабушка число $2^4 = 16$.
Ответ. 16

Задача 30. Натуральные числа a и b таковы, что $a > b$ и $\frac{\text{НОК}(a,b)}{\text{НОД}(a,b)} = 300$. Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a}{b}$?
Решение. Пусть $a = xd, b = yd$, где $d = \text{НО(a, b)}$, а числа x и y, соответственно взаимно простые. Тогда $\frac{\text{НОК}(a,b)}{\text{НОД}(a,b)} = \frac{xyd}{d} = xy$. Значит, нам нужно представить 300 в виде произведения двух взаимно простых чисел, отличающихся друг от друга меньше всего. $300 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 3$ и каждый из этих простых множителей может входить только в одно из чисел x или y, значит x уже не может быть меньше 25. Указанный ответ получается, когда $a = x = 25$, $b = y = 12$, $d = 1$.
Ответ. $\frac{25}{12}$

Задача 31. На доске написано число 1. Разрешается заменять написанное на доске число x на числа $3x + 1{,}5x + 2$ или $x - 7$. Найдите наименьшее двузначное число, которое никогда не появится на доске.
Решение. Нарисовав граф указанных операций по модулю 7, обнаруживаем, что остаток 1 не может перейти в остаток 3, откуда и следует ответ.
Ответ. 10

Задача 32. Среди простых делителей натурального числа a содержатся только 2 и 3, причем двоек в два раза больше, чем троек. Найти число a, если общее число его возможных делителей на 63 меньше числа всех делителей a^2.
Решение. Пусть $a = 2^{2x} \cdot 3^x$. Количество делителей числа a равно $d(a) = (2x+1)(x+1)$, количество делителей числа a^2 равно $d(a^2) = (4x+1)(2x+1)$. По условию: $(4x+1)(2x+1) - (2x+1)(x+1) = 63$, или $(2x+1)(3x) = 63$. Единственный положительный корень $x = 3$. Тогда $a = 2^{2 \cdot 3} \cdot 3^3 = 1728$.
Ответ. 1728