

Математическая игра «7 Чудес». 7–8 классы



Задача 1. Сколько существует 6-значных чисел, у которых по три чётные и три нечётные цифры?

Задача 2. Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, которые остаются палиндромами, после прибавления к ним числа 11?

Число-палиндром — это число, которое читается одинаково как справа налево, так и слева направо. Например, число 123 не является числом-палиндромом, а число 12321 — является.

Задача 3. Дана доска 6×6 . Сколькими способами ладья может пройти из левого нижнего в правый верхний угол так, чтобы все её ходы имели разную длину, и чтобы в её маршруте ходы вверх и вправо чередовались.

Задача 4. Назовём число *красивым*, если оно получается выписыванием друг за другом слева направо по возрастанию пяти последовательных трёхзначных чисел. Сколько красивых чисел делятся на 23?

Задача 5. Квадрат 21×21 разрезали ломаной, идущей по границам клеточек из левого нижнего угла в противоположный, смещаясь только вправо и вверх. Квадрат какого наибольшего размера гарантированно можно вырезать из одной из двух получившихся частей?

Задача 6. Нарисуйте на клетчатой бумаге четырехугольник с вершинами в узлах, длины сторон которого — различные простые числа.

Задача 7. Рассмотрим треугольник с вершинами в точках $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(2; 201)$. Сколько целых точек лежит внутри него?

Задача 8. Какое наименьшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы после стирания любой из отмеченных точек среди оставшихся точек можно было найти четыре вершины квадрата? Приведите пример.

Задача 9. Из города Непоймигде в город Тамгденадо ведут две дороги. Маша и её брат Петя ездят по ним на велосипедах. Когда Маша едет по первой дороге, а Петя по второй, Маша обгоняет его на 51 минуту, а если наоборот, то Петя приезжает раньше на 12 минут. Если они едут вместе по первой дороге, то Маша приезжает раньше на 15 минут. На сколько минут раньше приедет Маша, если они вместе поедут по второй дороге? (Скорости ребят могут быть непостоянными даже на протяжении одной дороги!)

Задача 10. Река течёт из города A в город B . В реке плавает щука, а по берегу реки ползает рак. Если рак выползет из города A навстречу щуке, которая одновременно выплывет из города B , то они встретятся через полтора часа. Если же, наоборот, щука выплывет из A , а рак одновременно выползет из B , то они встретятся через час. Через сколько времени они бы встретились, если бы течения в реке не было?

Задача 11. Лиза, Женя и мама гуляли по замкнутой парковой аллее длиной 600 метров. Известно, что скорость Лизы в два раза больше скорости мамы, а скорость Жени в пять раз больше скорости мамы. Лиза и Женя начали свою прогулку от скамейки, в то время как мама ещё до скамейки не дошла. На каком наименьшем положительном расстоянии от скамейки могла находиться мама, при котором все трое когда-нибудь бы встретились в одной точке?

Задача 12. Где-то в горах, возможно на разной высоте, расположены посёлки A , B и C . Дороги между ними идут вверх и вниз, а как именно — неизвестно. Антон идёт из A в B 40 минут, обратно — 60 минут, а расстояние от A до B равно 5 км. Расстояние от A до C равно 3 км, и Антон идёт из A в C 30 минут. А сколько времени он идёт обратно? Скорость Антона

в гору всегда постоянна и под гору тоже, но между собой они могут быть не равны.

Задача 13. С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её *неожиданной*, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четвёрка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок – по 10 пятёрок, четвёрок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Сколько оценок были для него неожиданными?

Задача 14. Книга сшита из 12 одинаковых тетрадей. Каждая тетрадь состоит из нескольких двойных листов, вложенных друг в друга. Тетради книги сшиты последовательно друг за другом. Все страницы книги пронумерованы, начиная с 1. Сумма номеров четырех страниц одного из двойных листов четвертой тетради равна 338. Сколько страниц в этой книге?

Задача 15. В ряд стоят 20 мальчиков и 25 девочек в каком-то порядке. Каждого ребенка спросили, сколько слева от него стоит детей другого пола. Чему равна сумма чисел, названных детьми?

Задача 16. В однокруговом турнире по футболу все команды сыграли друг с другом, кроме «Зенита», которому осталось ещё сыграть несколько игр. На данный момент проведено 222 игры. В каком количестве игр принял участие «Зенит»?

Задача 17. Последовательность задана рекуррентным способом: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Сумма скольких первых членов последовательности равна 2026?

Задача 18. Произведение трёх последовательных натуральных чисел в 8 раз больше, чем их сумма. Чему равна сумма квадратов данных трёх чисел?

Задача 19. Для целых чисел a, b и c верно равенство $a + 2b = 3b + 4c = 5c + 6a$. Найдите наименьшее шестизначное значение $a + b + c$.

Задача 20. На доске в ряд написаны три числа. Вася продолжает строчку вправо, дописывая ещё четыре. При этом каждое новое число равно сумме самого правого и третьего справа. Сумма всех семи чисел оказалась равна 2024. Найдите сумму исходных трёх и последнего числа.

Задача 21. Сумма четырёхзначного числа и трёхзначного числа, полученного в результате вычёркивания из четырёхзначного числа одной цифры, равна 6033. Найдите сумму цифр четырёхзначного числа.

Задача 22. Антон выписал на доску числа от 1 до 2024. Боря под каждым из чисел написал сумму цифр этого числа. Далее между Бориными числами Витя, чередуя слева направо, ставил знаки вычитания и сложения, причём начал с минуса. Чему равно значение полученного выражения?

Задача 23. В четырёхзначном числе Петя зачеркнул первую цифру и получил трёхзначное число. Затем он разделил исходное число на это трёхзначное и получил частное 3, а остаток 8. Чему равно исходное число? (Найдите все возможные числа.)

Задача 24. Первая цифра пятизначного натурального числа a равна 1. Если переставить единицу на последнее место, то полученное число будет на 5842 меньше утроенного числа a . Найти a .

Задача 25. На слёт «Юный Аквалангист» приехали несколько дайверов и аквалангистов (всего не больше 20 участников), причём оказалось, что все разного роста. Дайверы всегда говорят правду тем, кто ниже их по росту, и врут тем, кто выше их. Аквалангисты же, наоборот, врут более низким участникам и говорят правду более высоким. При знакомстве каждый

участник подошел к каждому и сказал либо «Я выше тебя», либо «Я ниже». Фраза «Я ниже» прозвучала 20 раз. Прощаясь, каждый должен был снова подойти к каждому и сказать «Я выше и я дайвер». Если кто-то не мог так сказать, то он хлопал в ладоши. Раздалось 18 хлопков. Вычислите, сколько человек приехало на слёт, и расставьте их по росту.

Задача 26. Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел — первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

Задача 27. Про трёхзначное натуральное число n сделали пять утверждений:

- (а) число чётное;
- (б) произведение цифр нечётно;
- (в) число состоит из подряд идущих цифр (в каком-то порядке);
- (г) число делится на 13;
- (д) сумма цифр равна 9.

Оказалось, что из этих утверждений ровно одно неверное. Найдите все такие n .

Задача 28. В Школе Рыцарей и Лжецов, в которой каждый ученик либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт, учатся k учеников ($k > 100$). Все они пронумерованы в журнале числами от 1 до k . Каждый из них сказал: «Число лжецов в нашей школе делится на мой номер». Приведите пример k , когда по данным ответам нельзя однозначно определить, сколько в школе лжецов, если известно, что хотя бы один лжец там есть.

Задача 29. Вова, Петя и Маша сидят за круглым столом и играют в устный счет. Игра состоит в том, что каждый, услышав «на ушко» от соседа справа число, умножает его на свое, заранее придуманное простое число, и сообщает результат соседу слева. Круг игры начинается с Вовы и заканчивается им, игра завершается после 3 кругов. Первое натуральное число сообщает Вове «на ушко» его бабушка. Вова объявляет всем последнее услышанное им число 86400. Какое число сообщила Вове бабушка, если все придуманные игроками числа были различными?

Задача 30. Натуральные числа a и b таковы, что $a > b$ и $\frac{\text{НОК}(a,b)}{\text{НОД}(a,b)} = 300$. Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a}{b}$?

Задача 31. На доске написано число 1. Разрешается заменять написанное на доске число x на числа $3x + 1$, $5x + 2$ или $x - 7$. Найдите наименьшее двузначное число, которое никогда не появится на доске.

Задача 32. Среди простых делителей натурального числа a содержатся только 2 и 3, причем двоек в два раза больше, чем троек. Найти число a , если общее число его возможных делителей на 63 меньше числа всех делителей a^2 .