Математическая игра «7 Чудес». 9 классы

Задача 1. На доску последовательно выписали все числа от 2025 до 202500: 202520262027 ... 202499202500. Сколько раз в это последовательности встретилось число 1743?

Задача 2. Найдите такое наименьшее натуральное N, что числа от 2 до N можно разбить на непересекающиеся группы так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме остальных чисел этой группы.

Задача 3. В пятизначном числе зачеркнули одну из цифр и из исходного числа вычли это четырёхзначное. В результате получили число 54321. Найдите исходное число.

Задача 4. У входа в парк развлечений висит электронное табло, показывающее время (часы и минуты). Когда табло показало 9 : 00, в парке открылись шесть аттракционов и работали до вечера по 1,2,3,4,5 и 6 минут соответственно с минутным перерывом. Когда Олег пришёл днём в парк, ни один аттракцион не работал. Какое время показывало электронное табло в этот момент?

Задача 5. Есть два выпуклых многоугольника. У первого многоугольника вдвое больше острых углов, чем у второго тупых, а у второго втрое больше острых углов, чем у первого тупых. Также известно, что у каждого из них есть хотя бы один острый угол и что у этих многоугольников (одного или обоих) есть еще и прямые углы.Сколько прямых углов у каждого из многоугольников?

Задача 6. $ABCD$ — квадрат, M, N — отличные от его вершин точки на его сторонах AB, CD соответственно. Известно, что $\angle DMA = \angle NMB = \angle NBM$. Найдите, чему равно отношение $\dfrac{AM}{AB}$.

Задача 7. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC с основанием AC выбрали точки N и M так, что точка N лежит между B и M, $NM = AM$ и $\angle MAC = \angle BAN$. Найдите $\angle CAN$.

Задача 8. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC отметили точку C_1 такую, что $BC = CC_1$. Затем на катете AB отметили точку C_2 такую, что $AC_2 = AC_1$; аналогично определяется точка A_2. Найдите угол AMC, где M - середина отрезка A_2C_2.

Задача 9. Половина пути от дома до школы проходит по равнине, остальная часть — по холмам. Петя вышел из дома в 8 часов, а вернулся из школы в 15 часов, при этом он 6 часов находился в школе и сразу после уроков отправился домой. Скорость его движения на спусках — 6км/час, на подъемах – 3км/час, на ровных участках – 4км/час. Найти длину пути от дома до школы.

Задача 10. Незнайка устроился работать почтальоном. Перед первым рабочим днём ему сообщили протяженности маршрутов $ABED$, AF и $CBEFA$ в каком-то порядке: 24 км, 36 км и 12 км. Также известно, что $ACDF$ — квадрат, а $BCDE$ — прямоугольник. Какой длины маршрут $ABEF$, если известно что длина маршрута $CBED$ равна 16 км?

Задача 11. На бесконечном клетчатом поле в клетке с координатами $(0; 0)$ сидит лягушка, которая умеет прыгать на соседнюю клетку (в том числе по диагонали). Сколькими способами она может добраться за шесть прыжков до клетки с координатами $(6; 3)$?

Задача 12. Три пункта А, В и С расположены на кольцевой дороге через промежутки в 30 км. Из А в В выезжает велосипедист со скоростью 10 км/ч, из В в С — второй со скоростью 12 км/ч, из С в А — третий со скоростью 15 км/ч. Через сколько часов первый велосипедист окажется посередине между вторым и третьим?

Задача 13. Когда Робинзон Крузо попал на необитаемый остров, у него было 200 ружейных зарядов. Ради их экономии он решил каждый день тратить на охоте не более 5% имеющихся на то утро зарядов. В какой-то момент Робинзон уже не мог делать выстрелы, придерживаясь своего правила. Сколько патронов он истратил к этому моменту?

Задача 14. Настенные часы с циферблатом и минутной стрелкой не могут показывать время, если хотя бы одна из стрелок находится между 3 и 4 или между 8 и 9. Сколько в сутках времени, когда эти часы можно показывать?

Задача 15. Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 10 партий, второй — 21. Сколько партий сыграл третий игрок?

Задача 16. У Сизифа есть несколько камней, каждый из которых весит не более десяти талантов. Он заметил, что при любом разбиении камней на две группы в одной из них суммарный вес будет не больше десяти талантов. Каков наибольший возможный суммарный вес всех камней?

Задача 17. Решите в натуральных числах уравнение $n^3 - n = n!$.

Задача 18. Для целых чисел a, b и c верно равенство $a + 2b = 3b + 4c = 5c + 6a$. Найдите наименьшее натуральное значение $a + b + c$ кратное 2025.

Задача 19. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению:

$$x^2 + 4y^2 = 12y - 8x + 20.$$

Задача 20. Для натурального числа $n > 1$ обозначим $L(n)$ наибольший натуральный делитель числа n, который не равен n. Например, $L(12) = 6$, $L(5) = 1$. Положим также $L(1) = L(0) = 0$. Найдите все натуральные n, для которых

$$n + L(n) + L(L(n)) + \cdots + \underbrace{L(\ldots L(n)\ldots)}_{n \text{ раз}} = 2022.$$

Задача 21. Ученик не заметил знак умножения между двумя трёхзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.

Задача 22. Назовём число *красивым*, если оно получается выписыванием друг за другом слева направо по возрастанию пяти последовательных трёхзначных чисел. Сколько красивых чисел делятся на 46?

Задача 23. Петя задумал натуральное число и для каждой пары его цифр выписал на доску их разность. После этого он стер некоторые разности, и на доске остались числа 2, 0, 0, 7. Какое наименьшее число мог задумать Петя?

Задача 24. Найдите все натуральные n, для которых сумма цифр числа 5^n равна 2^n.

Задача 25. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды за круглый стол сели 30 жителей этого острова. Каждый из них сказал какую-то из двух фраз: «Мой сосед слева — лжец» или «Мой сосед справа — лжец». Какое наименьшее количество рыцарей может быть за столом?

Задача 26. За круглым столом сидят 60 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из сидящих за столом произнёс фразу: «Среди следующих 3 человек, сидящих справа от меня, не более одного рыцаря». Сколько рыцарей могло сидеть за столом?

Задача 27. В Школе Рыцарей и Лжецов, в которой каждый ученик либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт, учатся k учеников ($k > 100$). Все они пронумерованы в журнале числами от 1 до k. Каждый из них сказал: «Число лжецов в нашей школе делится на мой номер». Приведите пример k, когда по данным ответам нельзя однозначно определить, сколько в школе лжецов, если известно, что хотя бы один лжец там есть.

Задача 28. В начале урока учитель спросил детей «В смысле?» и получил ответы: «В прямом», «В переносном», «В коромысле». В конце урока он задал тот же вопрос и получил тот же набор ответов. Оказалось, что тех, кто хотя бы раз ответил «В коромысле», и тех, кто так не отвечал, поровну. Ответивших хотя бы раз «В прямом» оказалось вдвое больше тех, кто ни разу так не отвечал. И, наконец, тех, кто ответил «В переносном», было в три раза больше, чем тех, кто так не отвечал. Во сколько раз меньше ответивших одинаково по сравнению с теми, кто поменял свой ответ?

Задача 29. Назовем -значное натуральное число *недюжинным*, если к нему можно справа дописать три разные цифры так, чтобы все три образованных $(n+1)$-значных числа были простыми. Какое наименьшее натуральное значение может принимать разница двух недюжинных чисел? Приведите пример.

Задача 30. Найдите все натуральные числа n, при которых число $5^n - 1$ является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.

Задача 31. Среди простых делителей натурального числа a содержатся только 2 и 3, причем двоек в два раза больше, чем троек. Найти число a, если общее число его возможных делителей на 108 меньше числа всех делителей a^2.

Задача 32. Есть 5 карточек с числами 3, 4, 5, 6, 7. Сколько из них можно сложить пятизначных чисел, делящихся на 55?