Математическая игра «7 Чудес». 9 классы.
Решения и ответы

Задача 1. На доску последовательно выписали все числа от 2025 до 202500: 202520262027 ...202499202500. Сколько раз в это последовательности встретилось число 1743?

Решение. Сосчитаем вхождения *внутри* отдельных чисел:в 5-значных числах: подстрока на позициях 1–4: числа 17430–17439 (10 чисел); подстрока на позициях 2–5: числа $X1743$ ($X = 1, \ldots, 9$, 9 чисел). 6-значных числах: подстрока на позициях 1–4: 174300–174399 (100 чисел); подстрока на позициях 2–5: числа $A1743B$ ($A = 1$, $B = 0, \ldots, 9$ — 10 чисел); подстрока на позициях 3–6: числа $AB1743$ ($A = 1$, $B = 0, \ldots, 9$ — 10 чисел; $A = 2$, $B = 0$ — 1 число). Итого внутри: $10 + 9 + 100 + 10 + 11 = 140$.
Вхождения *на границах* между числами:
Последняя цифра предыдущего числа+первые три следующего: 4-значные: 743[1 743]2 (1); 5-значные: $743X[1 \quad 743]X2$ ($X = 0, \ldots, 9$ — 10);
Последние две цифры предыдущего+первые две следующего: 4-значные: 43[17 43]18 (1); 5-значные: $43X[17 \quad 43]X18$ ($X = 0, \ldots, 9$ — 10);
Последние три цифры предыдущего+первая следующего: 4-значные: 3[174 3]175 (1); 5-значные: $3X[174 \quad 3]X175$ ($X = 0, \ldots, 9$ — 10); Всего на границах: $11 + 11 + 11 = 33$.
Ответ. 173

Задача 2. Найдите такое наименьшее натуральное N, что числа от 2 до N можно разбить на непересекающиеся группы так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме остальных чисел этой группы.

Решение. Наименьшее такое $N = 10$: числа от 2 до 10 разбиваются на тройки {2,7,9}, {3,5,8}, {4,6,10}, где в каждой группе одно число равно сумме двух других. Сумма всех чисел от 2 до N должна быть чётной, потому что в каждой группе сумма всех элементов равна удвоенной сумме меньших чисел (если $a + b = c$, то $a + b + c = 2c$ — чётно), а сумма чётных чисел чётна; при $N = 5$: сумма $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ — чётная, но должно быть хотя бы две группы хотя бы по три числа; $N = 6$: сумма 20 — чётная, возможные группы: {2,3,5}, {2,4,6}; $N = 9$: сумма 44 — чётная, но все разбиения {2,3,5}, {2,7,9}, {3,5,8} или {2,3,4,9}.
Ответ. $N = 10$

Задача 3. В пятизначном числе зачеркнули одну из цифр и из исходного числа вычли это четырёхзначное. В результате получили число 54321. Найдите исходное число.

Решение. Пусть x — полученное после зачеркивания цифры четырехзначное число. Заметим, что зачеркнутая цифра была последней в пятизначном числе, т.к. в противном случае после вычитания последняя цифра была бы нулем. Пусть это цифра y. Имеем уравнение $10x+y-x = 54321 \Leftrightarrow 9x+y = 54321 = 9 \cdot 6035 + 6$. Значит, $x = 6035$ и $y = 6$ (частное и остаток при делении на 9 числа 54321).
Ответ. 60356

Задача 4. У входа в парк развлечений висит электронное табло, показывающее время (часы и минуты). Когда табло показало $9:00$, в парке открылись шесть аттракционов и работали до вечера по $1, 2, 3, 4, 5$ и 6 минут соответственно с минутным перерывом. Когда Олег пришёл днём в парк, ни один аттракцион не работал. Какое время показывало электронное табло в этот момент?

Решение. Назовём периодом аттракциона время, за которое проходит перерыв и один цикл аттракциона. Олег пришёл в момент, когда ни один аттракцион не работал, а значит, прошло целое число периодов каждого аттракциона, если считать с $8:59$. Пусть прошло x минут, тогда x делится на 2,3,4,5,6 и 7 . Наименьшее такое число - это наименьшее общее кратное (НОК) этих чисел: $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ (минут), т.е. 7 часов. Прибавим 7 часов ко времени начала работы аттракционов, получим $15:59$. Если прибавить еще 7 часов, получим уже $22:59$. Так как дело было днём, то подходит только первый вариант.
Ответ. 15:59

Задача 5. Есть два выпуклых многоугольника. У первого многоугольника вдвое больше острых углов, чем у второго тупых, а у второго втрое больше острых углов, чем у первого тупых. Также известно, что у каждого из них есть хотя бы один острый угол и что у этих многоугольников (одного или обоих) есть еще и прямые углы.Сколько прямых углов у каждого из многоугольников?

Решение. Оценим, сколько нетупых углов может быть у выпуклого многоугольника. Пусть многоугольник имеет n углов, из которых k нетупые. С одной стороны, сумма углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$. С другой стороны, k его углов не больше 90°, а остальные $(n-k)$ меньше 180°. Получаем неравенство $180^\circ \cdot (n-2) \leqslant 90^\circ \cdot k + 180^\circ \cdot (n-k)$, из которого после преобразования получается $k \leqslant 4$. Поэтому нетупых углов не больше четырех. При этом равенство достигается только в случае, когда все углы прямые.

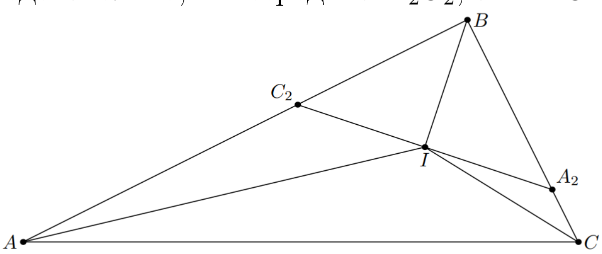
А значит, острых углов не больше трех. Учитывая это, делаем выводы, что у первого многоугольника может быть только 2 острых угла, у второго - 3 , и у них по одному тупому углу.

Прямых углов у второго многоугольника нет (так как уже есть три острых). Значит, прямой угол есть у первого многоугольника, и раз у него уже два острых угла, то прямой угол только один.
Ответ. У первого — 1, у второго — 0

Задача 6. $ABCD$ — квадрат, M, N — отличные от его вершин точки на его сторонах AB, CD соответственно. Известно, что $\angle DMA = \angle NMB = \angle NBM$. Найдите, чему равно отношение AM/AB.
Решение. Из параллельности AB и CD имеем $\angle DMA = \angle MDN$, аналогично $\angle DNM = \angle NMB$, и $\angle BNC = \angle NBM$. Учитывая равенство углов из условия — все 6 вышеупомянутых углов равны между собой. Далее из прямоугольных треугольников ADM и NCB имеем $\angle ADM = 90^\circ - \angle AMD = 90^\circ - \angle BNC = \angle CBN$. Тогда треугольники DAM и BCN равны по стороне и двум прилежащим углам $AD = BC, \angle DAM = \angle BCN, \angle ADM = \angle CBN$. Тогда $AM = NC$ — соответственные стороны этих треугольников. Пусть X — середина MB. Т.к. треугольник MNB равнобедренный, то NX в нём высота и медиана, а тогда XNB и CBN — прямоугольные треугольники, при этом в них равны острые углы NBX и BNC, а тогда равны и другие два их острых угла. Тогда эти треугольники равны по общей стороне BN и двум прилежащим углам, откуда $NC = BX$ — соответствующие стороны. Итак, $AB = AM + MX + MB = AM + 2BX = AM + 2NC = AM + 2AM = 3AM$, то есть $\dfrac{AM}{AB} = 1/3$.
Ответ. 1/3

Задача 7. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC с основанием AC выбрали точки N и M так, что точка N лежит между B и M, $NM = AM$ и $\angle MAC = \angle BAN$. Найдите $\angle CAN$.
Решение. Пусть $\angle MAC = \angle BAN = \alpha$, $\angle NAM = \angle ANM = \beta$ (последние два угла равны, как углы при основании равнобедренного треугольника MAN). Тогда $\angle A = 2\alpha + \beta$, а из треугольника ACN находим $\angle C = 180^\circ - \alpha - 2\beta$. Приравнивая углы A и C, находим $2\alpha + \beta = 180^\circ - \alpha - 2\beta$, откуда $\angle CAN = \alpha + \beta = 60^\circ$.
Ответ. 60°

Задача 8. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC отметили точку C_1 такую, что $BC = CC_1$. Затем на катете AB отметили точку C_2 такую, что $AC_2 = AC_1$; аналогично определяется точка A_2. Найдите угол AMC, где M - середина отрезка A_2C_2.
Решение. Пусть I - центр вписанной окружности треугольника ABC. Так как точка C_1 симметрична B относительно CI, а C_2 симметрична C_1 относительно AI, то $BI = IC_2$ и $\angle BIC_2 = 90^\circ$. Аналогично $BI = IA_2$ и $\angle BIA_2 = 90^\circ$. Следовательно, $I-$ середина A_2C_2, а $\angle AIC = 135^\circ$.



Ответ. 135°

Задача 9. Половина пути от дома до школы проходит по равнине, остальная часть — по холмам. Петя вышел из дома в 8 часов, а вернулся из школы в 15 часов, при этом он 6 часов находился в школе и сразу после уроков отправился домой. Скорость его движения на спусках — 6км/час, на подъемах – 3км/час, на ровных участках – 4км/час. Найти длину пути от дома до школы.
Решение. $S-$ длина пути, S_1- длина пути по спускам, S_2- длина пути на подъемах, $S/2 = S_1 + S_2$
$t = 15 - 8 - 6 = 1-$ время в пути туда и обратно. Тогда
$1 = \frac{S_1}{6} + \frac{S_2}{3} + \frac{S}{2\cdot 4} + \frac{S_1}{3} + \frac{S_2}{6} + \frac{S}{2\cdot 4} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)(S_1 + S_2) + \frac{S}{4} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)\frac{S}{2} + \frac{S}{4} = \frac{S}{2} \to S = 2.$
Ответ. 2

Задача 10. Незнайка устроился работать почтальоном. Перед первым рабочим днём ему сообщили протяженности маршрутов $ABED$, AF и $CBEFA$ в каком-то порядке: 24 км, 36 км и 12 км. Также известно, что $ACDF$ — квадрат, а $BCDE$ — прямоугольник. Какой длины маршрут $ABEF$, если известно что длина маршрута $CBED$ равна 16 км?
Решение. $ABED$ длиннее AF, потому что $ABED$ содержит в себе BE, равный AF. В свою очередь, $CBEFA = CBEF + FA$, где $ABED = CBEF$. Получается, что AF самый короткий из 36, 24, 12, значит $AF = 12$. Мы нашли сторону квадрата $ACDF$. $CBED = 12 + BC + DE$, значит, $BC = DE = 2$. Значит, $AB = EF = 10$, $CBED = 10 + 10 + 12 = 32$.
Ответ. 32 км

Задача 11. На бесконечном клетчатом поле в клетке с координатами $(0; 0)$ сидит лягушка, которая умеет прыгать на соседнюю клетку (в том числе по диагонали). Сколькими способами она может добраться за шесть прыжков до клетки с координатами $(6; 3)$?
Решение. Лягушка должна сместиться на 6 клеток вправо, поэтому первая координата клетки, в которой она находится, должна увеличиваться на 1 после каждого прыжка. А вверх лягушка должна сместиться на 3 клетки, что можно сделать двумя способами.
1) Вторая координата три раза увеличивается на 1 и три раза не меняется. Тогда нужно выбрать, какие три из шести прыжков будут увеличивать координату, это можно сделать $C_6^3 = 20$ способами.
2) Вторая координата четыре раза увеличивается на 1, один раз уменьшается на 1 и один раз не меняется. Прыжок, уменьшающий координату, может быть любым из шести, а не меняющий – любым из пяти оставшихся, поэтому в этом случае получаем $6 \cdot 5 = 30$ способов.
Таким образом, всего есть $20 + 30 = 50$ способов.
Ответ. 50

Задача 12. Три пункта A, B и C расположены на кольцевой дороге через промежутки в 30 км. Из A в B выезжает велосипедист со скоростью 10 км/ч, из B в C — второй со скоростью 12 км/ч, из C в A — третий со скоростью 15 км/ч. Через сколько часов первый велосипедист окажется посередине между вторым и третьим?
Решение. Длина кольца: $30 \cdot 3 = 90$ км. Пусть через t часов первый велосипедист окажется посередине между вторым и третьим. Тогда удвоенная позиция первого должна равняться сумме позиций второго и третьего с учётом кольцевой дороги. Уравнение: $2 \cdot 10t = (30 + 12t) + (60 + 15t) - 90k$, где k — целое число. Упрощаем: $20t = 90 + 27t - 90k$, $-7t = 90 - 90k$, $t = \frac{90(k-1)}{7}$. Минимальное положительное время при $k = 2$: $t = 90/7$ часов.
Ответ. $\dfrac{90}{7}$ ч

Задача 13. Когда Робинзон Крузо попал на необитаемый остров, у него было 200 ружейных зарядов. Ради их экономии он решил каждый день тратить на охоте не более 5% имеющихся на то утро зарядов. В какой-то момент Робинзон уже не мог делать выстрелы, придерживаясь своего правила. Сколько патронов он истратил к этому моменту?
Решение. Если Робинзон не смог сделать выстрел по правилам, то один заряд — это больше, чем 5% имевших- ся зарядов. Тогда 20 зарядов — это больше, чем 100% имевшихся зарядов, то есть у него их осталось не более 19. С другой стороны, вчера патронов было хотя бы 20, а осталось не меньше 95% от этого количества, то есть их осталось хотя бы 19. Поэтому Робинзон потратил $200 - 19 = 181$ патрон.
Ответ. 181

Задача 14. Настенные часы с часовой и минутной стрелками не могут показывать время, если хотя бы одна из стрелок находится между 3 и 4 или между 8 и 9. Сколько в сутках времени, когда эти часы показывают время?
Решение. Решение: Запрещенные зоны для стрелок: между 3 и 4 (60°) и между 8 и 9 (60°). Доля времени нахождения одной стрелки в запрете: 1/6. Для часовой стрелки за сутки: $24 \cdot 60 \cdot 1/6 = 240$ минут; для минутной: $24 \times 10 = 240$ минут. Время одновременного нахождения обеих стрелок в запрете: 40 минут (по 20 минут за 12 часов). Общее время запрета: $240 + 240 - 40 = 440$ минут. Разрешенное время: $1440 - 440 = 1000$ минут.
Ответ. 1000 мин = 16 ч 40 мин

Задача 15. Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 10 партий, второй — 21. Сколько партий сыграл третий игрок?
Решение. По условию второй игрок сыграл 21 партию, поэтому всего было сыграно не менее 21 партии. Из каждых двух партий подряд первый игрок хотя бы в одной должен участвовать, значит, партий было не более $2 \cdot 10 + 1 = 21$. Следовательно, была сыграна всего 21 партия, и второй игрок участвовал в каждой из них. В 10 партиях он встречался с первым, а в оставшихся 11 партиях — с третьим.
Ответ. 11

Задача 16. У Сизифа есть несколько камней, каждый из которых весит не более десяти талантов. Он заметил, что при любом разбиении камней на две группы в одной из них суммарный вес будет не больше десяти талантов. Каков наибольший возможный суммарный вес всех камней?
Решение. Начнём класть гири на две чаши весов и остановимся, когда нельзя будет добавить еще один камень на любую чашу, не превышая 10 талантов. На данный момент на весах не более 20 талантов веса, и может остаться только один камень (в противном случае можно добавить камень к каждой чаше, и обе они превысили бы 10 талантов). Оставшийся камень весит не более 10 талантов, так что суммарный вес всех камней составляет не более всего 30 талантов. Пример: 3 камня, каждый весом по 10 талантов.
Ответ. 30

Задача 17. Решите в натуральных числах уравнение $n^3 - n = n!$.
Решение. Проверим $n = 1, 2, 3, 4, 5$ и убедимся, что из них подходит только $n = 5$. Разложим левую часть на множители и преобразуем: $n^3 - n = n(n-1)(n+1) = n!$, $n+1 = (n-2)!$, $n+1 = (n-2)(n-3)(n-4)!$. При $n > 5$ имеем $n+1 < (n-2)(n-3)$ и $n-4 > 1$, значит, правая часть будет больше левой.
Ответ. 5

Задача 18. Для целых чисел a, b и c верно равенство $a + 2b = 3b + 4c = 5c + 6a$. Найдите наименьшее натуральное значение $a + b + c$ кратное 2025.
Решение. Докажем, что $a+b+c$ кратно 35. Заметим, что $a = 13t, b = 25t, c = -3t$. Действительно, из первого равенства получаем $a = b+4c$, а из второго $3b = c+6a$. Подставим a: $3b = c+6(b+4c) = 6b+25c$; $b = -25/3$. Если $c = -3t$, то $b = 25t$ и $a = 25t - 12t = 13t$.
Получаем ответ $([100000/35] + 1) \cdot 35 = 100030$.
Ответ. 14175

Задача 19. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению:

$$x^2 + 4y^2 = 12y - 8x + 20$$

Решение. Преобразуем уравнение: $(x+4)^2 + (2y-3)^2 = 45$. Поскольку $2y-3$ — нечётное, его квадрат сравним с 1 по модулю 4, а $45 \equiv 1 \pmod 4$, значит, $(x+4)^2 \equiv 0 \pmod 4$, то есть $x+4$ чётно. Единственные подходящие пары квадратов: $36 + 9$. Тогда $x + 4 = \pm 6$, $2y - 3 = \pm 3$, откуда получаем четыре пары решений.
Ответ. (2, 3), (2, 0), (-10, 3), (-10, 0)

Задача 20. Для натурального числа $n > 1$ обозначим $L(n)$ наибольший натуральный делитель числа n, который не равен n. Например, $L(12) = 6$, $L(5) = 1$. Положим также $L(1) = L(0) = 0$. Найдите все натуральные n, для которых

$$n + L(n) + L(L(n)) + \dots + \underbrace{L(\dots L(n)\dots)}_{n \text{ раз}} = 2022.$$

Решение. Если $n > 1$, то $n = pL(n)$, где p – простое число. Отсюда следует, что $L(n) < n$ и в последовательности n, $L(n)$, $L(L(n))$, $\dots$ не позже n-го места встретится 1. Таким образом, наше уравнение означает, что

$$1 + p_1 + p_1p_2 + \dots + p_1p_2\dots p_k = 1 + p_1(1 + p_2(1 + \dots + p_{k-1}(1 + p_k)) = 2022.$$

Поскольку в последовательности n, $L(n)$, $L(L(n))$, ...каждый член делится на все последующие, последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots$ – невозрастающая.

Поэтому $p_1(1+p_2(\ldots)) = 2021 = 43 \cdot 47$, то есть $p_1 = 43$ или $p_1 = 47$. В первом случае $p_2(1+p_3(\ldots)) = 46$, то есть p_2 – простой делитель 46, не больший его трети. следовательно, $p_2 = 2$ и $p_3(1+\ldots) = 22$. Но при этом все дальнейшие p_i – двойки, что невозможно. Во втором случае $p_2(1+p_3(\ldots)) = 42$, и p_2 может быть равно 2, 3 или 7. Случай $p_2 = 2$ невозможен по тем же причинам, что и в прошлый раз; при $p_2 = 3$ получается $p_3(\ldots) = 13$, то есть $p_3 = 13$, что опять невозможно. Наконец, при $p_2 = 7$ получаем $p_3 = 5$, что даёт ответ.
Ответ. 1645

Задача 21. Ученик не заметил знак умножения между двумя трёхзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.
Решение. Перепишем равенство в виде $1000x = (7x-1)y$. Числа x и $7x-1$ взаимно просты. Значит, $7x-1$ - делитель числа 1000. Но $7x-1 \geqslant 7\cdot 100-1 = 699$, поэтому $7x-1 = 1000$, откуда $x = 143$. Подставляя в исходное уравнение, находим $y = 143$.
Ответ. 143 и 143

Задача 22. Назовём число *красивым*, если оно получается выписыванием друг за другом слева направо по возрастанию пяти последовательных трёхзначных чисел. Сколько красивых чисел делятся на 46?
Решение. Красивое число представимо в виде $\overline{abc}\cdot 1001001001001 + 1002003004$, где $\overline{abc} < 1000-4 = 996$. Множитель 1001001001001 не делится на 46, а 1002003004 делится. Значит, красивых чисел столько же, сколько трёхзначных чисел кратных 46, а их $[900/46] = 19$ (наибольшее трёхзначное кратное 46 равно $[999/46]\cdot 46 = 966$).
Ответ. 19

Задача 23. Петя задумал натуральное число и для каждой пары его цифр выписал на доску их разность. После этого он стер некоторые разности, и на доске остались числа 2, 0, 0, 7. Какое наименьшее число мог задумать Петя?
Решение. Действительно, число 11138 могло быть задумано: $2 = 3-1, 0 = 1-1, 7 = 8-1$. Предположим, что задумано число $N < 11138$. Поскольку выписаны разности 2 и 7 , то различных цифр в числе N не менее трех. Так как выписаны два нуля, то среди цифр найдутся либо три одинаковых, либо две пары равных. Так как $N < 11138$, то в числе N ровно пять цифр, среди которых ровно три различные цифры, и первая цифра равна 1 . Если в записи N встречаются 0,1 и $a > 1$, то среди разностей цифр встречаются лишь числа $0, 1, a$, $a-1$, что невозможно. Иначе в записи N нет нулей, и $N = \overline{111bc}$, где $b = 2$ или $b = 3$ (т.к. $N < 11138$). Тогда $c \geqslant 1+7 = 8$, откуда $b \neq 3$. Но если $b = 2$, то среди разностей цифр встречаются лишь числа $0, 1, c-1, c-2$. Противоречие.
Ответ. 11138

Задача 24. Найдите все натуральные n, для которых сумма цифр числа 5^n равна 2^n.
Решение. Проверка показывает, что из чисел $n = 1, 2, 3, 4, 5$ подходит только $n = 3$. Докажем, что при $n \geqslant 6$ сумма цифр числа 5^n меньше чем 2^n. Действительно, число 5^n не более чем n-значно, поэтому сумма его цифр не превосходит $9n$. С другой стороны, $2^n \geqslant 9n$. В самом деле, при $n = 6$ оно верно, а при увеличении n на единицу правая часть этого неравенства увеличивается на 9 , а левая - не менее чем на 64 .
Ответ. 3

Задача 25. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды за круглый стол сели 30 жителей этого острова. Каждый из них сказал какую-то из двух фраз: «Мой сосед слева — лжец» или «Мой сосед справа — лжец». Какое наименьшее количество рыцарей может быть за столом?
Решение. Рядом с каждым лжецом должен сидеть хотя бы один рыцарь (иначе, если с обеих сторон от лжеца сидят лжецы, то сказанная им фраза точно оказа- лась бы правдой). Следовательно, среди любых трёх подряд сидящих жителей есть хотя бы один рыцарь. Если разбить всех собравшихся за столом на группы из трёх подряд сидящих жителей, получим, что в каждой из них есть хотя бы один рыцарь, поэтому всего рыцарей хотя бы 10 Приведём пример, когда рыцарей ровно 10 Пусть жители сидят так: рыцарь, два лжеца, рыцарь, два лжеца и т. д. Каждый из рыцарей говорит любую из приведённых фраз — она в любом случае окажется истинной. Лжец говорит: «Мой сосед слева — лжец», если слева от него рыцарь, и наоборот, он говорит: «Мой сосед справа — лжец», если справа

от него рыцарь. Ясно, что все условия задачи выполняются.
Ответ. 10

Задача 26. За круглым столом сидят 60 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из сидящих за столом произнёс фразу: «Среди следующих 3 человек, сидящих справа от меня, не более одного рыцаря». Сколько рыцарей могло сидеть за столом?
Решение. Рассмотрим любую четвёрку подряд идущих людей. Если бы в ней было хотя бы 3 рыцаря, то самый левый из рыцарей точно сказал бы неправду, что невозможно. Если бы в ней было хотя бы 3 лжеца, то самый левый из лже- цов точно сказал бы правду, что тоже невозможно. Значит, в каждой четвёрке подряд идущих людей ровно 2 рыцаря и ровно 2 лжеца. 15 таких четвёрок, получаем, что рыцарей $15 \cdot 2 = 30$.
Ответ. 30

Задача 27. В Школе Рыцарей и Лжецов, в которой каждый ученик либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт, учатся k учеников ($k > 100$). Все они пронумерованы в журнале числами от 1 до k. Каждый из них сказал: «Число лжецов в нашей школе делится на мой номер». Приведите пример k, когда по данным ответам нельзя однозначно определить, сколько в школе лжецов, если известно, что хотя бы один лжец там есть.
Решение. Например, когда 105 учеников (99 лжецов и 6 рыцарей под номерами 1, 3, 9, 11, 33 и 99, либо 103 лжеца и 2 рыцаря под номерами 1 и 103); 159 учеников (144 лжеца и 15 рыцарей, либо 155 лжецов и 4 рыцаря под номерами 1, 5, 31 и 155, либо 153 лжеца и 6 рыцарей под номерами 1, 3, 9, 17, 51 и 153, либо 157 лжецов и 2 рыцаря), а также во многих других случаях, установить точное количество лжецов нельзя.
Ответ. 105, 159 и другие (проверять пример)

Задача 28. В начале урока учитель спросил детей «В смысле?» и получил ответы: «В прямом», «В переносном», «В коромысле». В конце урока он задал тот же вопрос и получил тот же набор ответов. Оказалось, что тех, кто хотя бы раз ответил «В коромысле», и тех, кто так не отвечал, поровну. Ответивших хотя бы раз «В прямом» оказалось вдвое больше тех, кто ни разу так не отвечал. И, наконец, тех, кто ответил «В переносном», было в три раза больше, чем тех, кто так не отвечал. Во сколько раз меньше ответивших одинаково по сравнению с теми, кто поменял свой ответ?
Решение. Количество тех, кто ни разу не ответил «В коромысле», составляет 1/2 всего класса. Количество тех, кто ни разу не ответил «В прямом», равно 1/3 всего класса. Наконец, количество тех, кто ни разу не сказал «В переносном», равно 1/4 всего класса. Сложив эти числа, мы сложим по одному разу тех, кто ответил разное, и дважды тех, кто ответил одинаково, и получим 13/12. Значит, те, кто ответил одинаково, составляют 1/12 часть класса, и их в 11 раз меньше, чем остальных.
Ответ. в 11 раз

Задача 29. Назовем n-значное натуральное число *недюжинным*, если к нему можно справа дописать три разные цифры так, чтобы все три образованных $(n + 1)$-значных числа были простыми. Какое наименьшее натуральное значение может принимать разница двух недюжинных чисел? Приведите пример.
Решение. Последними цифрами неоднозначного простого числа могут быть только 1, 3, 7 или 9 (иначе число делится на 2 или на 5). Пусть N - недюжинное число. Тогда из четырех чисел $10N + 1, 10N + 3, 10N + 7$ и $10N + 9$, по крайней мере, три должны быть простыми, а составным, соответственно, будет максимум одно число. Но если $N = 3k$, где k натуральное число, то числа $10N + 3$ и $10N + 9$ не могут быть простыми, потому что делятся на 3. А если $N = 3k + 2$, то на 3 делится $10N + 1$ и $10N + 7$. Это означает, что каждое недюжинное число при делении на 3 дает остаток 1, а значит, разность двух таких чисел не может быть меньше 3. В то же время быть равной 3 разность двух недюжинных чисел действительно может. Например, числа 4 и 1, разность которых равна 3, являются недюжинными, т. к. тройки 11, 13 и 17 и 41, 43, 47 являются простыми числами.
Ответ. 3 (например: 11, 13 и 17 и 41, 43, 47)

Задача 30. Найдите все натуральные числа n, при которых число $5^n - 1$ является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.
Решение. Так как произведение пяти и более последовательных натуральных чисел делится на 5 , а число $5^n - 1$ не делится на 5 , то $5^n - 1$ является произведением двух или четырех последовательных

натуральных чисел. Пусть $5^n - 1 = k(k+1)$. Перебирая остатки по модулю 5, получаем, что $k(k+1)$ не может быть сравнимо с -1 по модулю 5 . Пусть $5^n - 1 = k(k+1)(k+2)(k+3)$. Тогда $5^n = k(k+1)(k+2)(k+3) + 1 = \left(k^2 + 3k + 1\right)^2$. Отсюда $n = 2m$ - четно, и $5^m = k^2 + 3k + 1$. Рассмотрим это равенство как квадратное уравнение относительно k. Его дискриминант $D = 5 + 4 \cdot 5^m = 5\left(1 + 4 \cdot 5^{m-1}\right)$ при $m > 1$ делится на 5, но не делится на 25 и потому не является полным квадратом. При $m = 1 D = 9$, и мы получаем ответ.

Ответ. 2

Задача 31. Среди простых делителей натурального числа a содержатся только 2 и 3, причем двоек в два раза больше, чем троек. Найти число a, если общее число его возможных делителей на 108 меньше числа всех делителей a^2.

Решение. Пусть $a = 2^{2x} \cdot 3^x$. Количество делителей числа a равно $d(a) = (2x+1)(x+1)$, количество делителей числа a^2 равно $d(a^2) = (4x+1)(2x+1)$. По условию: $(4x+1)(2x+1) - (2x+1)(x+1) = 63$. $(2x+1)(3x) = 108$. Положительный корень $x = 4$. Тогда $a = 2^{2 \cdot 4} \cdot 3^4 = 20736$.

Ответ. 20736

Задача 32. Есть 5 карточек с числами 3, 4, 5, 6, 7. Сколько из них можно сложить пятизначных чисел, делящихся на 55?

Решение. Рассмотрим число $\overline{abcde}$ с такими свойствами. Оно делится на 5 , поэтому $e = 5$. Так как оно делится на 11, то по признаку делимости знакопеременная сумма цифр S делится на 11 : $S = a - b + c - d + 5 \vdots 11$. Наибольшего значения она достигает, когда с плюсом берутся самые большие цифры, а наименьшего - когда самые маленькие. Таким образом, $S \leqslant 7 + 6 - 4 - 3 + 5 = 11$ и $S \geqslant 4 + 3 - 7 - 6 + 5 = -1$. Заметим, что среди пяти цифр числа ровно 3 нечетные, значит S нечетно. Итак, S делится на 11, нечетно и $-1 \leqslant S \leqslant 11$, значит $S = 11$. Такая знакопеременная сумма цифр достигается только тогда, когда с плюсом берутся самые большие цифры. То есть 6 и 7 стоят на первом и третьем местах, а 3 и 4 на втором и четвертом. Это дает 4 возможные комбинации: 63745,64735,73645,74635.

Ответ. 4