



Задача 1. На оси Ox отмечены точки $0 = A_0 < A_1 < \dots < A_n$, на графике $y = \sqrt{x}$ — точки $B_1, \dots, B_n$ так, что каждый треугольник $A_{k-1}A_kB_k$ — равносторонний. Известно, что высота последнего треугольника равна h . Чему равна сумма длин высот всех треугольников?

Решение. Обозначим через s_k длину стороны k -го равностороннего треугольника, а через H_k — его высоту. Тогда $H_k = \frac{s_k\sqrt{3}}{2}$. Из условия задачи следует, что для каждого k выполняется соотношение:

$A_{k-1} = \frac{3}{4}s_k^2 - \frac{s_k}{2}$, где $A_{k-1} = s_1 + s_2 + \dots + s_{k-1}$.

Запишем $A_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2i}{3} = \frac{(k-1)k}{3}$, $\frac{3}{4}s_k^2 - \frac{s_k}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4k^2}{9} - \frac{k}{3} = \frac{k^2}{3} - \frac{k}{3} = \frac{k(k-1)}{3}$, тогда $s_k = \frac{2k}{3}$.

Тогда высота k -го треугольника: $H_k = \frac{s_k\sqrt{3}}{2} = \frac{2k\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{k\sqrt{3}}{3}$.

Сумма высот всех треугольников: $\sum_{k=1}^n H_k = \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{k=1}^n k = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)\sqrt{3}}{6}$.

По условию, высота последнего треугольника равна h : $H_n = \frac{n\sqrt{3}}{3} = h \Rightarrow n = \frac{3h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$.

Подставляем $n = h\sqrt{3}$ в сумму высот:

$$\sum H_k = \frac{h\sqrt{3}(h\sqrt{3}+1)\sqrt{3}}{6} = \frac{h \cdot 3(h\sqrt{3}+1)}{6} = \frac{3h^2\sqrt{3}+3h}{6} = \frac{h^2\sqrt{3}}{2} + \frac{h}{2}.$$

Ответ. $h^2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{h}{2}$

Задача 2. Учитель написал на доске 10 отрицательных целых чисел. Вася переписал в тетрадь эти числа, затем записал туда же всевозможные их попарные произведения, всевозможные произведения трёх, четырёх, ..., девяти из этих чисел и, наконец, произведение всех десяти чисел. Оказалось, что сумма всех записанных Васей чисел отрицательна. Чему она могла быть равна?

Решение. Пусть на доске написаны числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Положим $A = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_{10})$. По условию все 10 сомножителей в правой части неположительны. Поэтому $A \geq 0$. Заметим теперь, что, раскрыв все скобки в правой части, мы получим как раз сумму всех записанных Васей чисел, увеличенную на 1. Значит, сумма всех записанных Васей чисел не меньше, чем -1 , а так как она по условию отрицательна, то она равна -1 .

Ответ. -1

Задача 3. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O . Прямая, проведённая из вершины B и перпендикулярная стороне AD , пересекает эту сторону в точке H . Известно, что $AC^2 = 2CH^2$. Найдите $\cos \angle BAD$.

Решение. Пусть сторона ромба равна a . Рассмотрим $\triangle ABO$: $AC = 2AO = 2a \cos \alpha$. Теперь рассмотрим $\triangle ABH$: $BH = a \cdot \sin 2\alpha$. По теореме Пифагора в $\triangle BHC$: $HC^2 = BH^2 + BC^2$, $\frac{AC^2}{2} = BH^2 + a^2$, $2a^2 \cos^2 \alpha = a^2 \sin^2 2\alpha + a^2$, $\frac{1+\cos 2\alpha}{2} = 2 - 2 \cos^2 2\alpha$, $\cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - 1 = 0$.

По области значений косинуса подходит только $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Задача 4. Назовем натуральное число *счастливым*, если все его цифры можно разбить на две группы, сумма цифр в каждой из которых одинакова. Примеры: 38221 ($3 + 2 + 2 + 1 = 8$), 5678 ($5 + 8 = 6 + 7$). Назовем число *суперсчастливым*, если оно счастливое и следующее за ним целое число тоже счастливое. Найдите количество суперсчастливых чисел на отрезке $[400; 2400]$.

Решение. Рассмотрим трехзначные числа. Сумма цифр счастливого числа должна быть четной, иначе разбиение на две группы с одинаковой суммой цифр невозможно, поэтому суперсчастливое число должно заканчиваться цифрой 9, так как в ином случае суммы цифр двух последовательных чисел имеют разную четность. Значит, суперсчастливое трехзначное число имеет вид $\overline{ab}9$, а следующее за ним число состоит из цифр $a, b+1, 0$. Отметим, что при этом случай $b = 9$ невозможен, так как тогда число не будет счастливым. Поэтому должны делиться на две группы с одинаковой суммой цифр как цифры a, b и 9, так и цифры $a, b+1$ и 0. Для первой комбинации цифр или $a = b+9$, откуда $a = 9, b = 0$, или $b = a+9$, что невозможно, или $a+b = 9$. Для второй комбинации $a = b+1$. Одновременно оба числа счастливые только при $b = 4, a = 5$. Таким образом, имеется одно трехзначное суперсчастливое число 549 (за ним следует счастливое число 550).

Рассмотрим четырехзначные числа. Аналогично предыдущему, суперсчастливые числа должны заканчиваться цифрой 9. И также оно не может заканчиваться на 99, тогда сумма цифр двух последовательных чисел будет иметь разную четность, или на 999, тогда оно не будет суперсчастливым. Значит, искомое число имеет вид $\overline{abc9}$, где $a \in [1,9], b \in [0,9], c \in [0,8]$. Следующее за ним число состоит из цифр $a, b, c+1, 0$. Вначале рассмотрим случай $a = 1$. Должны делиться на две группы с одинаковой суммой цифр как цифры 1, b, c и 9 (назовем их первой комбинацией цифр), так и цифры 1, $b, c+1$ и 0 (назовем их второй комбинацией). Для чисел второй комбинации возможны три ситуации (заметим, что не имеет значения, в какую группу включать 0): $1 = b + c + 1$ (то есть $b = c = 0$), $b = 1 + c + 1$ (то есть $b = c + 2$), $c + 1 = 1 + b$ (то есть $b = c$). Для чисел первой комбинации вариантов гораздо больше, для уменьшения их количества подставим туда полученные выше три ситуации для второй комбинации. Если $b = c = 0$, то комбинация 1, 0, 0, 9 счастливой не является. Если $b = c + 2$, то получаются цифры 1, $c+2, c$ и 9. Возможные варианты: $9 = 1 + c + 2 + c$ (тогда $c = 3$), $9 + 1 = c + 2 + c$ (тогда $c = 4$).

Получаются суперсчастливые числа 1539 (за ним следует 1540) и 1649 (за ним следует 1650). Если $b = c$, то получаются цифры 1, c, c и 9. Возможные варианты: $9 = 1 + c + c$ (тогда $c = 4$), $9 + 1 = c + c$ (тогда $c = 5$).

Получаются суперсчастливые числа 1449 (за ним следует 1450) и 1559 (за ним следует 1560). Таким образом, в интервале $[1000, 1999]$ есть 4 суперсчастливых числа: 1449, 1539, 1559 и 1649. 3) Рассмотрим случай $a = 2$. Должны делиться на две группы с одинаковой суммой цифр как цифры 2, b, c и 9 (первая комбинация цифр), так и цифры 2, $b, c+1$ и 0 (вторая комбинация). Для чисел второй комбинации возможны три ситуации: $2 = b + c + 1$ (то есть $b + c = 1$), $b = 2 + c + 1$ (то есть $b = c + 3$), $c + 1 = 2 + b$ (то есть $b + 1 = c$).

Если $b = c + 1$, то комбинация 2, $b, c, 9$ счастливой не является. Если $b = c + 3$, то получаются цифры 2, $c + 3, c$ и 9. Возможные варианты: $9 = 2 + c + 3 + c$ (тогда $c = 2$), $9 + 2 = c + 3 + c$ (тогда $c = 4$).

Получаются суперсчастливые числа 2529 (за ним следует 2530) и 2749 (за ним следует 2750). Если $c = b + 1$, то получаются цифры 2, $b, b + 1$ и 9. Возможные варианты: $9 = 2 + b + b + 1$ (тогда $b = 4$), $9 + 2 = b + b + 1$ (тогда $b = 5$).

Получаются суперсчастливые числа 2349 (за ним следует 2350) и 2569 (за ним следует 2570). Таким образом, в интервале $[2000, 2999]$ есть 4 суперсчастливых числа: 2349, 2529, 2569 и 2749. Всего на отрезке $[400; 2400]$ имеется 6 суперсчастливых чисел: 549, 1449, 1539, 1559, 1649, 2349.

Ответ. 6

Задача 5. Владислав произнёс названия всех натуральных чисел от 180 до 220 включительно, а Сергей — от 191 до 231 включительно. Кто больше произнёс слов и на сколько?

Решение. Уберем встречающиеся у обоих числа: 191–220. Тогда у каждого останется по 11 чисел: у Владислава 180–190, у Сергея 221–231. Заметим, что в названиях чисел 181–189, 221–229 и 231 по три слова, а в 180, 190 и 230 — по два. Получается, что Сергей произнес на одно слово больше.

Ответ. Сергей на 1 слово больше

Задача 6. Можно ли представить число 2025 в виде суммы двух натуральных чисел, сумма цифр одного из которых втрое больше суммы цифр другого?

Решение. Да, это возможно.

Ответ. $27 + 1998, 36 + 1989, 126 + 1899, 999 + 1026$ (любое представление)

Задача 7. На некотором острове живёт 100 человек, каждый из которых является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Однажды все жители этого острова выстроились в ряд, и первый из них сказал: «Количество рыцарей на этом острове является делителем числа 1». Затем второй сказал: «Количество рыцарей на этом острове является делителем числа 2», и так далее до сотого, который сказал: «Количество рыцарей на этом острове является делителем числа 100». Определите, сколько рыцарей может проживать на этом острове.

Решение. Если рыцарей нет, то все говорящие врут, так как 0 не является делителем какого-либо натурального числа. Если рыцари есть, то пусть первый рыцарь имеет номер x . Тогда число рыцарей является делителем числа x , но не будет являться делителем чисел $1, 2, \dots, x-1$, поскольку до него все лгали. Легко видеть, что тогда число рыцарей равно x . Тогда ему кратны только числа $x, 2x, 3x, \dots, kx$. Здесь $kx \leq 100, (k+1)x > 100$. Ровно на этих позициях и только на них и должны стоять рыцари, откуда всего их будет $k = x$. Имеем $x^2 \leq 100, x(x+1) > 100$. Под это условие подходит только $x = 10$. В качестве примера достаточно поставить рыцарей на позиции 10, 20, ... 100.

Ответ. 0, 10

Задача 8. График функции $y(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \frac{8}{3}x + 3$ имеет две точки максимума и одну точку минимума. К графику провели касательную с двумя точками касания. Найдите длину отрезка касательной между точками касания.

Решение. Пусть $g(x) = kx + b$ - касательная из условия и x_1, x_2 — координаты точек касания на оси x . Так как $y(x) - g(x) = 0$ в точках касания, то они являются корнями чётной кратности данного многочлена $(y(x) - g(x))$. Так как коэффициент при старшей степени x равен -1 , можем представить многочлен в следующем виде: $y(x) - g(x) = -(x - x_1)^2(x - x_2)^2$. Пусть правая часть $f(x)$, тогда: $f(x) = -(x - x_1)^2(x - x_2)^2 = -x^4 + 2(x_1 + x_2)x^3 - (x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2)x^2 + 2x_1x_2(x_1 + x_2)x - x_1^2x_2^2$.

Запишем полученные для функций условия в точках касания в систему:

$$\begin{cases} y(x) - g(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \left(\frac{8}{3} + k\right)x + 3 - b \\ f(x) = -x^4 + 2(x_1 + x_2)x^3 - (x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2)x^2 + 2x_1x_2(x_1 + x_2)x - x_1^2x_2^2 \\ y(x) - g(x) = f(x) \end{cases}$$

Из равенства коэффициентов следует:

$$\begin{cases} 2 = 2(x_1 + x_2) \\ 3 = -(x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2) \\ -\left(\frac{8}{3} + k\right) = 2x_1x_2(x_1 + x_2) \\ 3 - b = -x_1^2x_2^2 \end{cases}$$

Отсюда можно выразить $x_1 + x_2$ и x_1x_2 : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$

То есть $x_1 = 2, x_2 = -1$. Теперь можно найти коэффициенты k и b : $k = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}, b = 3 + 4 = 7$. Получается, что $g(x) = \frac{4}{3}x + 7$. Значения касательной в точках касания:

$$g(x_1) = \frac{4}{3} \cdot 2 + 7 = \frac{29}{3}, \quad g(x_2) = \frac{4}{3} \cdot (-1) + 7 = \frac{17}{3}$$

Тогда длина отрезка касательной между точками касания - пусть l :

$$l = \sqrt{(2 - (-1))^2 + \left(\frac{29}{3} - \frac{17}{3}\right)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Получили искомое значение длины отрезка касательной между точками касания - 5.

Ответ. 5

Задача 9. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\text{НОК}(x,y)} + \frac{1}{\text{НОД}(x,y)} = 1$.

Решение. Заметим сначала, что в знаменателях нет единицы. Более того, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{240+180+144+120}{720} < 1$. Значит, среди или среди знаменателей есть двойка, или есть хотя бы одно равенство. Любое равенство приводит либо к случаю $x = y$, и тогда ясно, что $x = y = 4$, или к случаю $x = ky$. В последнем случае $\frac{2}{ky} + \frac{2}{y} = 1$, то есть $ky = 2 + 2k$. Решения: $k = 2, y = 3; k = 1, y = 4$. Новое решение: $x = 6, y = 3$ и симметричное. Значит, остался случай $\text{НОД}(x, y) = 2$. Умножим все равенство на xy . Учитывая $xy = \text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОК}(x, y)$, получим $x + y + 2 + \frac{xy}{2} = xy$, откуда следует, что $(x - 2)(y - 2) = 8$. Так как x, y четные, то $x = 4, y = 6$ и симметрично (заметим, что вариант $x - 2 = -2$ невозможен). Имеем еще одно решение.

Ответ. (4; 4), (3; 6), (6; 3), (4; 6), (6; 4)

Задача 10. На столе лежат N карточек с числами от 1 до N . Костя и Никита взяли по 6 карточек. Оказалось, что произведения чисел на карточках у каждого из них одинаковы. При каком наименьшем N это могло случиться?

Решение. Покажем, что меньшего N не хватит. Действительно, нам нужны хотя бы два числа кратных 7, поэтому $N \geq 14$, однако при $N = 14$ придется оставлять числа 10 и 13, а произведение остальных не является квадратом (например, потому, что делится на нечетную степень тройки), поэтому его нельзя разделить на две группы с равными произведениями.

Оставим числа 10, 11 и 13. Костя заберет 2, 5, 6, 7, 8, 9 а Никита — 1, 3, 4, 12, 14, 15.

Ответ. 15

Задача 11. Натуральные числа таковы, что $a + c = 1000, b + d = 500$. Найти максимальное значение суммы $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

Решение. Ввиду симметрии можно считать, что $b \geq d$. Тогда при замене пары a, c на пару $a-1, c+1$, получим

$$\left(\frac{a-1}{b} + \frac{c+1}{d}\right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \frac{1}{d} - \frac{1}{b} \geq 0$$

увеличение искомого выражения, следовательно, максимум нужно искать среди дробей $\frac{1}{b} + \frac{999}{d}$. При замене пары b, d на пару $b+1, d-1$, получим

$$\left(\frac{1}{b+1} + \frac{999}{d-1}\right) - \left(\frac{1}{b} + \frac{999}{d}\right) = \frac{999}{d(d-1)} - \frac{1}{b(b+1)}$$

Ввиду того, что $b \geq d$, имеем $b(b+1) \geq d(d+1) > d(d-1)$. поэтому

$$\frac{999}{d(d-1)} > \frac{1}{d(d-1)} > \frac{1}{b(b+1)}$$

и предыдущая разность положительна. Следовательно, максимум выражения достигается при $a = 1, b = 499, c = 999, d = 1$ и равен $\frac{1}{499} + \frac{999}{1}$.

Ответ. 999 $\frac{1}{499}$

Задача 12. Назовём число *жёлтым*, если оно делится на 6, сумма его цифр делится на 6 и в записи числа есть хотя бы одна цифра 6. Сколько всего жёлтых трёхзначных чисел?

Решение. Количество трёхзначных чисел, делящихся на 6 с суммой цифр, кратной 6, равно 75. Среди них чисел без цифры 6 - 51. Следовательно, количество жёлтых чисел (с хотя бы одной цифрой 6) равно $75 - 51 = 24$.

Ответ. 24

Задача 13. Клетчатый квадрат 99×99 разрезан на прямоугольники по границам клеток. Прямоугольники раскрашены в три цвета так, чтобы прямоугольники одного цвета не соприкасались даже углами. Какое наибольшее число прямоугольников может быть?

Решение. *Оценка.* В каждом узле сетки могут быть прямоугольники не более, чем двух цветов. Если есть три цвета, то четвертый совпадает с каким-то из этих трёх. Узлов всего $100 \cdot 100 = 10\,000$. Но в углах квадрата может быть только 1 цвет. Всего углов прямоугольников $9996 \cdot 2 + 4 = 19996$. Значит, прямоугольников не больше 4999.

Ответ. 4999

Задача 14. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ расположены точки N и M соответственно, причём $AN : NB = 3 : 2, BM : MC = 2 : 5$. Прямые AM и DN пересекаются в точке O . Найдите отношения $OM : OA$ и $ON : OD$.

Решение. Продолжим DN до пересечения с прямой BC в точке T . Положим $BM = 2a, CM = 5a$.

Из подобия треугольников TNB и DNA (коэффициент $\frac{2}{3}$) находим, что

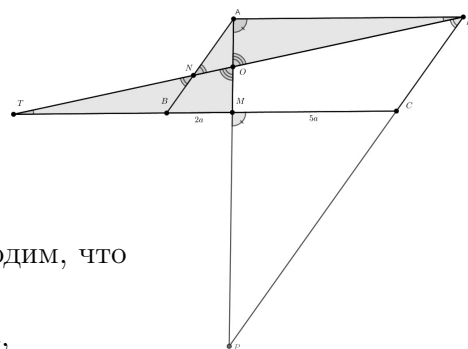
$$TB = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3} \cdot 7a = \frac{14}{3}a,$$

а из подобия треугольников TOM и DOA — что

$$\frac{OM}{OA} = \frac{TM}{AD} = \frac{\frac{14}{3}a + 2a}{7a} = \frac{20}{21}$$

Пусть $P = AM \cap CD$, тогда $\frac{PC}{PD} = \frac{MC}{AD} = \frac{5}{7}$, откуда $PD = \frac{7}{2}CD = \frac{7}{2}AB = \frac{35}{6}AN$, поскольку $AN = \frac{3}{5}AB$. Тогда из подобия ANO и ODP имеем $\frac{ON}{OD} = \frac{AN}{PD} = \frac{6}{35}$.

Ответ. 20 : 21, 6 : 35



Задача 15. Сколько существует таких приведённых квадратных трёхчленов $f(x) = x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами, что $f(f(1000)) = 0$?

Решение. Пусть $a = f(1000)$, из условия следует, что a - корень многочлена $f(x)$. Обозначим, второй корень за b , тогда верно $f(x) = (x-a)(x-b)$. Заметим, что $p = -(a+b)$, при этом a и p - целые, тогда и b — целое. С другой стороны, распишем число a : $a = f(1000) = (1000-a)(1000-b)$, $b = 1000 - \frac{a}{1000-a}$.

Число b целое тогда и только тогда, когда $\frac{a}{1000-a}$ — целое. Таким образом задача свелась к такой: сколько существует целых a , таких что $\frac{a}{1000-a}$ — целое. Посчитаем число таких a . Заметим, что $1000 \equiv a \pmod{1000-a}$, поэтому 1000 делится на $1000-a$. Откуда следует, что $1000-a$ — целый делитель 1000 . Число целых делителей $1000 = 2^3 \cdot 5^3$, равно $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$.

Ответ. 32

Задача 16. Найдите все тройки вещественных чисел x, y, z , для которых справедливо равенство множеств:

$$\{x, y, z\} = \left\{ \frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y} \right\}$$

Решение. Заметим, что $xyz = \frac{x-y}{y-z} \cdot \frac{y-z}{z-x} \cdot \frac{z-x}{x-y} = 1$, поэтому среди чисел x, y и z либо два отрицательных и одно положительное, либо все положительные. Без ограничения общности будем считать, что число x наибольшее, тогда ясно, что числа $\frac{x-y}{y-z}$ и $\frac{y-z}{z-x}$ имеют разные знаки, значит, $x > 0 > y, z$. Разберем два случая.

Случай 1. $x > 0 > y > z$. В этом случае легко видеть, что $\frac{y-z}{x-z} < \frac{x-z}{x-y}$ (числитель меньше числителя, знаменатель больше знаменателя, и все разности положительны). Поэтому $0 > \frac{y-z}{z-x} > \frac{z-x}{x-y}$ и

$$\begin{cases} xy - xz = x - y \\ yz - yx = y - z \\ zx - zy = z - x \end{cases}$$

Домножая на знаменатели, получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} xy - xz = x - y \\ yz - yx = y - z \\ zx - zy = z - x \end{cases}$$

Заметим, что сумма трех этих равенств равна 0, поэтому можно рассматривать только первые два. Выражая из второго равенства переменную y , находим $y = \frac{z}{x-z+1}$. Подставляя это выражение в первое равенство и упрощая, получаем: $z = \frac{-1-x}{x}$, $y = \frac{-1}{1+x}$.

Когда переменная x будет пробегать все возможные положительные значения, эти две формулы будут описывать соответствующие значения переменных y и z . Заметим, что мы рассматривали случай, когда переменная x - наибольшая. Если придать переменной x отрицательные значения, полученные формулы будут давать ответ в ситуациях, когда наибольшей является переменная y или z . Таким образом, первая серия ответов выглядит следующим образом:

$$(x, y, z) = \left(t, -\frac{1}{t+1}, -\frac{1+t}{t} \right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$$

Случай 2. $x > 0 > z > y$. В этом случае мы получаем аналогичную серию равенств:

$$x = \frac{y-z}{z-x}, \quad y = \frac{x-y}{y-z}, \quad z = \frac{z-x}{x-y}$$

Домножая на знаменатели, получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} xz - x^2 = y - z \\ y^2 - yz = x - y \\ zx - zy = z - x \end{cases}$$

Складывая эти равенства, получаем формулу $(x-y)(x+y-2z) = 0$. Учитывая, что $x \neq y$, находим $2z = x+y$. Тогда $z-x = y-z$, и первое уравнение нашей системы переписывается в виде $x(z-x) = z-x$. Вновь вспоминая, что $x \neq z$, находим $x = 1$. Остается решить несложную систему:

$$\begin{cases} z - yz = z - 1 \\ y + 1 = 2z \end{cases}$$

Решая ее, находим ответ $y = -2$ и $z = -\frac{1}{2}$ (мы учитываем, что $z > y$). Вновь циклически переставляя найденные ответы, получаем еще три тройки:

$$(1, -2, -\frac{1}{2}), \quad (-\frac{1}{2}, 1, -2), \quad (-2, -\frac{1}{2}, 1)$$

Ответ. $(x, y, z) = (t, -\frac{1}{t+1}, -\frac{1+t}{t})$, при $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, $(1, -2, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, 1, -2), (-2, -\frac{1}{2}, 1)$.

Задача 17. Перестановка чисел $1, 2, 3, \dots, n$ в некотором порядке называется *забавной*, если в ней каждое число, начиная со второго слева, либо больше всех чисел, стоящих левее него, либо меньше всех чисел, стоящих левее него. Например, перестановка $3, 2, 1, 4, 5, 6$ является забавной, а перестановка $3, 1, 2, 4, 5, 6$ — нет. Найти количество всех различных забавных перестановок чисел $1, 2, 3, \dots, n$.

Решение. Пойдём с конца. Последнее число a_n забавной перестановки либо больше, либо меньше всех чисел множества $1, 2, 3, \dots, n$, следовательно, оно равно 1 или n . Предпоследнее число a_{n-1} забавной перестановки либо больше, либо меньше всех чисел множества $1, 2, 3, \dots, n$, кроме a_n , то есть это наименьший или наибольший элемент во множестве $1, 2, 3, \dots, n-1$ или во множестве $2, 3, \dots, n$. В каждом из случаев есть ровно две возможности выбора, варианты для двух последних чисел перестановки выглядят так $(n-1, n), (1, n), (2, 1), (n, 1)$. Несложно убедиться, что при любом $k = n, n-1, \dots, 2, 1$ первые k чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ перестановки образуют интервал из k подряд идущих чисел из множества $1, 2, 3, \dots, n$, а число a_k является в этом интервале минимальным или максимальным — всего две возможности, кроме самого первого числа a_1 , для которого остаётся единственная возможность. Всего получаем ровно 2^{n-1} возможностей выбора.

Ответ. 2^{n-1}

Задача 18. Внутри пятиугольника отметили 1000 точек и разделили пятиугольник на треугольники так, чтобы каждая из отмеченных точек оказалась вершиной хотя бы одного из них. Какое наименьшее число треугольников могло получиться?

Решение. Сумма углов пятиугольника составляет 540° . Сумма углов в каждой внутренней точке составляет либо 180° , если она лежит на стороне одного из треугольников и является вершиной ещё нескольких, либо 360° , если со всех сторон от неё находятся углы треугольников. То есть, в каждой внутренней точке сумма углов не менее 180° .

Итого для тысячи точек получаем сумму углов всех треугольников не менее $540^\circ + 1000 \cdot 180^\circ = 1003 \cdot 180^\circ$. Для этого нам необходимо хотя бы 1003 треугольника, т.к. в каждом сумма углов 180° .

Пример, когда достигается значение 1003, строится следующим образом: сначала разделим пятиугольник на три треугольника диагоналями, выходящими из одной из вершин. Затем на одной из диагоналей отметим 1000 точек и соединим их с противоположной вершиной треугольника, для которого эта диагональ является стороной. Треугольник разобьётся на 1001 часть, что даст нам ещё 1000 новых треугольников.

Ответ. 1003

Задача 19. В спортивной школе занимается 55 человек, каждый из которых либо теннисист, либо шахматист. Известно, что нет четырёх шахматистов, которые имели бы поровну друзей среди теннисистов. Какое наибольшее количество шахматистов может заниматься в этой школе?

Решение. Пусть в школе занимаются a теннисистов и $55 - a$ шахматистов. У каждого из шахматистов количество друзей-теннисистов не меньше 0 и не больше a , то есть может принимать $a + 1$ значений. Если бы шахматистов было больше $3(a + 1)$, среди них по принципу Дирихле нашлись четверо с одинаковым количеством друзей-теннисистов. Значит, шахматистов не больше $3(a + 1)$, получаем неравенство $55 - a \leq 3(a + 1)$. Решая его, получаем $a \geq 13$, тогда $55 - a \leq 55 - 13 = 42$. Заметим также, что ровно 42 шахматиста могло быть: пусть для каждого целого $0 \leq k \leq 13$ какие-то трое шахматистов имеют ровно k произвольных друзей-теннисистов.

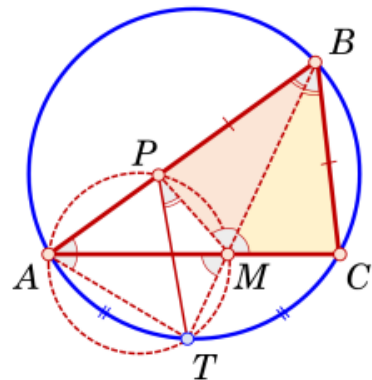
Ответ. 42

Задача 20. Сторона AB треугольника ABC больше стороны BC , а угол B равен 40° . На стороне AB взята точка P так, что $BP = BC$. Биссектриса BM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке T . Найдите угол MPT .

Решение. В четырехугольнике $APMT$ угол при вершине A измеряется половиной дуги TCB . Треугольники PMB и CMB равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle PMB = \angle CMB = \angle AMT$. Угол AMT измеряется полусуммой дуг AT и CB , причём: $\frac{1}{2}(\smile AT + \smile CB) = \frac{1}{2}(\smile TC + \smile CB) = \frac{1}{2} \smile TCB$.

Значит, $\angle CMB = \angle BAT$. Таким образом, $\angle PMB = \angle BAT$ и $\angle BAT + \angle PMT = \angle BAT + (180^\circ - \angle PMB) = 180^\circ$. Следовательно, сумма противоположных углов четырехугольника $APMT$ равна 180° , и значит, $APMT$ вписанный. По свойству вписанных углов $\angle MPT = \angle MAT = \angle CAT = \angle TBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 20^\circ$.

Ответ. 20°



Задача 21. Для попарно различных вещественных чисел a, b, c, d, e оказалось, что $ab + b = ac + a, bc + c = bd + b, cd + d = ce + c, de + e = da + d$. Найдите значение $abcde$.

Решение. Пусть какая-то переменная равна 0, например, a . Но тогда и $b = 0$, что противоречит условию. Таким образом, все переменные ненулевые. Пусть какая-то переменная равна -1, например, a . Тогда $c = -1$, противоречие с условием. Значит, -1 среди переменных тоже нет. Давайте перемножим все равенства. С учётом рассуждений, описанных выше, мы можем сократить в полученном равенстве одинаковые множители и получить равенство $e(b + 1) = a(e + 1)$. Теперь запишем четыре равенства из условия и только что полученное равенство в следующем виде: $a(b - c) = a - b, b(c - d) = b - c, c(d - e) = c - d, d(e - a) = d - e, e(a - b) = e - a$. Если их перемножить и сократить на одинаковые множители, получим 1.

Ответ. 1

Задача 22. В стране 100 сенаторов, у каждого из которых ровно 4 помощника. Сенаторы и их помощники состоят в комитетах. Комитет может состоять либо из 5 сенаторов, либо из 4 сенаторов и 4 помощников, либо из 2 сенаторов и 12 помощников. Каждый сенатор состоит в пяти комитетах, а каждый помощник — в трёх. Сколько всего комитетов в стране?

Решение. Пусть есть a комитетов «5-0», b комитетов «4-4» и c комитетов «2-12». Тогда во всех комитетах есть $5a + 4b + 2c$ сенаторов и $4b + 12c$ помощников. Отсюда $4b + 12c = 1200$ и $5a + 4b + 2c = 500$, следовательно, $5a + 5b + 5c = 500 + b + 3c = 500 + 300 = 800$, то есть общее число комитетов равно $a + b + c = 160$.

Ответ. 160

Задача 23. На шахматную доску по одной выставляются белые и чёрные ладьи в любом порядке. Очередную ладью можно ставить на поле, побитое одинаковым числом чёрных и белых ладей. Какое наибольшее число ладей можно выставить на поле таким образом?

Решение. Можно расставить ладьи на всех 64 клетках. Расставим по диагонали черные и белые ладьи чередуясь: $a8$ - черная, $b7$ - белая, $c6$ - черная, и так далее, $h1$ - белая. Затем ставим последовательно $b8$ - белая; $c7$ - $c8$ - черные; $d6$ - $d8$ - белые; $e5$ - $e8$ - черные, и так далее, $h2$ - $h8$ - белые. Затем $a7$ - белая; $b6$ - $a6$ - черные; $c5$ - $a5$ - белые, и так далее, $g1$ - $a1$ - белые.

Ответ. 64

Задача 24. Назовём натуральное число B родственником числа A , если оно составлено из такого же набора цифр, что и число A , но не равно ему. Например, 1202 является родственником числа 2120, а 12, 1102 и 0122 — нет (считается, что 0122 — это 122). Какое наименьшее количество родственников может иметь трёхзначное число, кратное 13?

Решение. Наименьшие возможные значения — 0: числа вида aaa или $a00$ не делятся на 13; 1: числа вида $aa0$ или $a0a$, которые тоже не делятся на 13.

Пример, когда родственников 2: например, 117.

Ответ. 2