# Математическая игра «Лес». 10–11 классы

**Задача 1.** На оси $Ox$ отмечены точки $0 = A_0 < A_1 < \ldots < A_n$, на графике $y = \sqrt{x}$ — точки $B_1, \ldots, B_n$ так, что каждый треугольник $A_{k-1}A_kB_k$ — равносторонний. Известно, что высота последнего треугольника равна $h$. Чему равна сумма длин высот всех треугольников?

**Задача 2.** Учитель написал на доске 10 отрицательных целых чисел. Вася переписал в тетрадь эти числа, затем записал туда же всевозможные их попарные произведения, всевозможные произведения трёх, четырёх, ..., девяти из этих чисел и, наконец, произведение всех десяти чисел. Оказалось, что сумма всех записанных Васей чисел отрицательна. Чему она могла быть равна?

**Задача 3.** Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Прямая, проведённая из вершины $B$ и перпендикулярная стороне $AD$, пересекает эту сторону в точке $H$. Известно, что $AC^2 = 2CH^2$. Найдите $\cos\angle BAD$.

**Задача 4.** Назовем натуральное число *счастливым*, если все его цифры можно разбить на две группы, сумма цифр в каждой из которых одинакова. Примеры: 38221 $(3+2+2+1=8)$, 5678 $(5+8=6+7)$. Назовем число *суперсчастливым*, если оно счастливое и следующее за ним целое число тоже счастливое. Найдите количество суперсчастливых чисел на отрезке $[400; 2400]$.

**Задача 5.** Владислав произнёс названия всех натуральных чисел от 180 до 220 включительно, а Сергей — от 191 до 231 включительно. Кто больше произнёс слов и на сколько?

**Задача 6.** Можно ли представить число 2025 в виде суммы двух натуральных чисел, сумма цифр одного из которых втрое больше суммы цифр другого?

**Задача 7.** На некотором острове живёт 100 человек, каждый из которых является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Однажды все жители этого острова выстроились в ряд, и первый из них сказал: «Количество рыцарей на этом острове является делителем числа 1». Затем второй сказал: «Количество рыцарей на этом острове является делителем числа 2», и так далее до сотого, который сказал: «Количество рыцарей на этом острове является делителем числа 100». Определите, сколько рыцарей может проживать на этом острове.

**Задача 8.** График функции $y(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \frac{8}{3}x + 3$ имеет две точки максимума и одну точку минимума. К графику провели касательную с двумя точками касания. Найдите длину отрезка касательной между точками касания.

**Задача 9.** Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\text{НОК}(x,y)} + \frac{1}{\text{НОД}(x,y)} = 1$.

**Задача 10.** На столе лежат $N$ карточек с числами от 1 до $N$. Костя и Никита взяли по 6 карточек. Оказалось, что произведения чисел на карточках у каждого из них одинаковы. При каком наименьшем $N$ это могло случиться?

**Задача 11.** Натуральные числа таковы, что $a + c = 1000, b + d = 500$. Найти максимальное значение суммы $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

**Задача 12.** Назовём число *жёлтым*, если оно делится на 6, сумма его цифр делится на 6 и в записи числа есть хотя бы одна цифра 6. Сколько всего жёлтых трёхзначных чисел?

**Задача 13.** Клетчатый квадрат $99 \times 99$ разрезан на прямоугольники по границам клеток. Прямоугольники раскрашены в три цвета так, чтобы прямоугольники одного цвета не соприкасались даже углами. Какое наибольшее число прямоугольников может быть?

**Задача 14.** На сторонах $AB$ и $BC$ параллелограмма $ABCD$ расположены точки $N$ и $M$ соответственно, причём $AN : NB = 3 : 2, BM : MC = 2 : 5$. Прямые $AM$ и $DN$ пересекаются в точке $O$. Найдите отношения $OM : OA$ и $ON : OD$.

**Задача 15.** Сколько существует таких приведённых квадратных трёхчленов $f(x) = x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами, что $f(f(1000)) = 0$ ?

**Задача 16.** Найдите все тройки вещественных чисел $x, y, z$, для которых справедливо равенство множеств:

$$\{x, y, z\} = \left\{\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y}\right\}$$

**Задача 17.** Перестановка чисел $1,2,3,\ldots,n$ в некотором порядке называется забавной, если в ней каждое число, начиная со второго слева, либо больше всех чисел, стоящих левее него, либо меньше всех чисел, стоящих левее него. Например, перестановка 3,2,1,4,5,6 является забавной, а перестановка 3,1,2,4,5,6 - нет. Найти количество всех различных забавных перестановок чисел $1,2,3,\ldots,n$.

**Задача 18.** Внутри пятиугольника отметили 1000 точек и разделили пятиугольник на треугольники так, чтобы каждая из отмеченных точек оказалась вершиной хотя бы одного из них. Какое наименьшее число треугольников могло получиться?

**Задача 19.** В спортивной школе занимается 55 человек, каждый из которых либо теннисист, либо шахматист. Известно, что нет четырёх шахматистов, которые имели бы поровну друзей среди теннисистов. Какое наибольшее количество шахматистов может заниматься в этой школе?

**Задача 20.** Сторона $AB$ треугольника $ABC$ больше стороны $BC$, а угол $B$ равен $40°$. На стороне $AB$ взята точка $P$ так, что $BP = BC$. Биссектриса $BM$ пересекает описанную около треугольника $ABC$ окружность в точке $T$. Найдите угол $MPT$.

**Задача 21.** Для попарно различных вещественных чисел $a, b, c, d, e$ оказалось, что

$$\begin{cases} ab + b = ac + a \\ bc + c = bd + b \\ cd + d = ce + c \\ de + e = da + d \end{cases}$$

Найдите значение $abcde$.

**Задача 22.** В стране 100 сенаторов, у каждого из которых ровно 4 помощника. Сенаторы и их помощники состоят в комитетах. Комитет может состоять либо из 5 сенаторов, либо из 4 сенаторов и 4 помощников, либо из 2 сенаторов и 12 помощников. Каждый сенатор состоит в пяти комитетах, а каждый помощник — в трёх. Сколько всего комитетов в стране?

**Задача 23.** На шахматную доску по одной выставляются белые и чёрные ладьи в любом порядке. Очередную ладью можно ставить на поле, побитое одинаковым числом чёрных и белых ладей. Какое наибольшее число ладей можно выставить на поле таким образом?

**Задача 24.** Назовём натуральное число $B$ *родственником* числа $A$, если оно составлено из такого же набора цифр, что и число $A$, но не равно ему. Например, 1202 является родственником числа 2120, а 12, 1102 и 0122 — нет (считается, что 0122 - это 122). Какое наименьшее количество родственников может иметь трёхзначное число, кратное 13?