

Математическая игра «Лес». 7–8 классы



Задача 1. В клетках квадрата 5×5 расставлены числа 1 и -1 так, что строк с положительной суммой больше, чем строк с отрицательной суммой. Какое наибольшее количество столбцов с отрицательной суммой чисел может при этом получить?

Задача 2. Учитель нарисовал на доске треугольник, длины сторон которого — последовательные натуральные числа. Паша вышел к доске и провел медиану этого треугольника, а Витя — биссектрису. Оказалось, что проведенные отрезки перпендикулярны. Найдите длины сторон треугольника.

Задача 3. Найдите все натуральные n , у которых ровно $n/2$ делителей.

Задача 4. На каждой грани куба написано по одному натуральному числу. Для каждой вершины вычислили произведение чисел на трёх примыкающих к ней гранях, сумма восьми полученных чисел равна 1001. Чему может равняться сумма шести чисел, написанных на гранях куба?

Задача 5. В классе учатся 25 школьников, каждый из которых либо отличник, либо хулиган. Отличники всегда говорят правду, а хулиганы всегда врут. Однажды 5 учеников этого класса сказали: «Если я перейду в другой класс, то среди оставшихся учеников будет больше половины хулиганов». Каждый из оставшихся 20 сказал: «Если я перейду в другой класс, то среди оставшихся учеников хулиганов будет в три раза больше, чем отличников». Сколько отличников учится в классе? Укажите все возможные варианты.

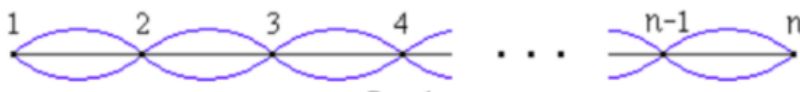
Задача 6. Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трёх чисел записали на доске, а затем всё, кроме трёх последних цифр этого произведения, стёрли. Какие три цифры могли остаться на доске?

Задача 7. Все натуральные делители двузначного числа выписали в порядке возрастания. Оказалось, что четвёртый делитель на два больше второго, а шестой — на три больше третьего. Чему может быть равно это двузначное число?

Задача 8. Найти четырехзначное число, равное квадрату суммы двух двузначных чисел, образованных двумя первыми и двумя последними цифрами числа.

Задача 9. В любой группе из трёх приехавших в лагерь школьников либо все трое попарно знакомы (то есть все знают всех), либо знакома только одна пара людей (а третий человек людей из пары не знает). По приезду в лагерь у Андрея оказалось 50 друзей, а у Бориса — 40. Сколько школьников приехало в лагерь?

Задача 10. На прямой расположено n городов, соединенных дорогами. Пешеход выходит из города 1. Он хочет пройти по всем дорогам, причём по каждой дороге только один раз. Сколько существует таких маршрутов? Маршруты считаются разными, если они отличаются последовательностью выбора дорог.



Задача 11. В настольной игре у героев есть 3 способности: сила, ум, отвага. Каждый игрок может выбрать для своего героя одну или две способности. Играют 32 игрока. Известно, что отважных героев (т. е. всех, имеющих способность отвага) в два раза больше умных и в k раз меньше, чем сильных (k — целое число, большее двух). Сколько игроков выбрали одну способность для героя, если известно, что игроков, выбравших 2 способности, на 2 больше, чем отважных?

Задача 12. Для натурального $n > 3$ будем обозначать через $n?$ (n -вопросиал) произведение всех простых чисел, меньших n . Решите уравнение $n? = 2n + 16$.

Задача 13. Найдите все такие натуральные числа, в записи которых цифры не повторяются, все цифры одной четности, а сами числа являются точными квадратами.

Задача 14. Петя записывает 9-значные числа. На первое место (самое левое) он пишет любую цифру от 1 до 9, на второе место — от 1 до 8, на третье — от 1 до 7, ..., на девятое (самое правое) — цифру 1. Сколько чисел, делящихся на 7, может получить Петя?

Задача 15. Дан параллелограмм $ABCD$ такой, что $\angle A = 60^\circ$. Пусть P и Q — середины сторон BC и CD соответственно. Оказалось, что точки A, P, Q, D лежат на одной окружности. Найдите $\angle ADB$.

Задача 16. У каждого составного числа от 1 до 170 нашли наименьший простой делитель. Найдите сумму обратных величин всех этих делителей.

Задача 17. За круглым столом сидят 2024 человека, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Каждый из сидящих за столом сообщил, что его соседи — рыцарь и лжец. Оказалось, что двое рыцарей ошиблись. Сколько лжецов за столом?

Задача 18. На птичьем базаре продают птиц. Известно, что более $\frac{1}{7}$ всех птиц составляют страусы, более $\frac{1}{3}$ всех птиц — голуби и более $\frac{1}{2}$ всех птиц — попугаи. Какое наименьшее количество птиц может продаваться на базаре?

Задача 19. Постройте четырехугольник периметра 18, площади 16, все стороны которого имеют нечетную длину.

Задача 20. Найдите все четырёхзначные числа $\overline{abcd}$ такие, что шестизначное число, полученное записью без пробелов двузначных чисел $\overline{ab} + 1$, $\overline{bc} + 2$, $\overline{cd} + 3$ подряд делится на 2025.

Задача 21. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + xy + y^2 = x + 20$$

Задача 22. Две стороны треугольника равны 34 и 32, а медиана, проведенная к третьей, равна 17. Найдите площадь треугольника.

Задача 23. Коле вдвое больше лет, чем было Оле, когда Коле было столько лет, сколько сейчас Оле. А когда Оле будет столько лет, сколько сейчас Коле, то им в сумме будет 36 лет. Сколько лет Коле сейчас?

Задача 24. Требуется сложить из 2010 спичек треугольник, одна из сторон которого вдвое больше другой. Необходимо использовать все спички. Сколькими способами это можно сделать?