

Математическая игра «Лес». 7–8 классы.

Решения и ответы



Задача 1. В клетках квадрата 5×5 расставлены числа 1 и -1 так, что строк с положительной суммой больше, чем строк с отрицательной суммой. Какое наибольшее количество столбцов с отрицательной суммой чисел может при этом получить?

Решение. Существуют примеры, в которых сумма в каждом столбце отрицательна. Например,

-1	-1	1	1	1
-1	1	-1	1	1
1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1

Ответ. 5

Задача 2. Учитель нарисовал на доске треугольник, длины сторон которого — последовательные натуральные числа. Паша вышел к доске и провел медиану этого треугольника, а Витя — биссектрису. Оказалось, что проведённые отрезки перпендикулярны. Найдите длины сторон треугольника.

Решение. Легко понять, что одна из сторон треугольника в 2 раза больше, чем другая. Тогда либо стороны треугольника равны 1, 2, 3 (чего не может быть по неравенству треугольника), либо 2, 3, 4. (Отдельно нужно рассмотреть случай, когда медиана и биссектриса проведены из одного угла — но тогда этот угол больше 180°).

Ответ. 2, 3, 4

Задача 3. Найдите все натуральные n , у которых ровно $n/2$ делителей.

Решение. Поскольку $d(n) \leq 2\sqrt{n}$ для всех n (т.к. делители идут парами $(d, n/d)$, и $d \leq \sqrt{n}$), то: $\frac{n}{2} = d(n) \leq 2\sqrt{n} \Rightarrow \frac{n}{2} \leq 2\sqrt{n} \Rightarrow n \leq 4\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} \leq 4 \Rightarrow n \leq 16$. Все остальные значения проверяем: $d(8) = 4$, (1, 2, 4, 8); $d(12) = 6$, (1, 2, 3, 4, 6, 12).

Ответ. 8, 12

Задача 4. На каждой грани куба написано по одному натуральному числу. Для каждой вершины вычислили произведение чисел на трёх примыкающих к ней гранях, сумма восьми полученных чисел равна 1001. Чему может равняться сумма шести чисел, написанных на гранях куба?

Решение. Если обозначить числа, стоящие на гранях куба через a, b, c, d, e, f , то при подходящей расстановке этих букв указанная сумма превратится в $(a + b)(c + d)(e + f)$. Так как все числа натуральные, то это только 7, 11, 13, поэтому ответ 31.

Ответ. 31

Задача 5. В классе учатся 25 школьников, каждый из которых либо отличник, либо хулиган. Отличники всегда говорят правду, а хулиганы всегда врут. Однажды 5 учеников этого класса сказали: «Если я перейду в другой класс, то среди оставшихся учеников будет больше половины хулиганов». Каждый из оставшихся 20 сказал: «Если я перейду в другой класс, то среди оставшихся учеников хулиганов будет в три раза больше, чем отличников». Сколько отличников учится в классе?

Решение. Назовём первой группой всех людей, сказавших первую фразу, и второй группой всех людей, сказавших вторую фразу. Рассмотрим два случая.

Пусть во второй группе есть хотя бы отличник, выберем любого из них. Среди 24 остальных людей хулиганов в три раза больше, чем отличников, поэтому всего хулиганов ровно 18, а отличников ровно $6 + 1 = 7$. Заметим, что такая ситуация возможна: в первой группе было 5 отличников, сказавших правду (ведь $18 > \frac{24}{2}$), а во второй группе было 2 отличника, сказавших правду (ведь $18 = 3 \cdot 6$), а также 18 хулиганов, сказавших неправду (ведь $17 \neq 3 \cdot 7$).

Пусть во второй группе вообще нет отличников, тогда всего хулиганов хотя бы 20. Тогда любой человек из первой группы сказал правду (ведь и 19, и 20 составляют больше половины от 24), поэтому все 5 человек в первой группе — отличники, и отличников в классе ровно 5. Заметим, что такая ситуация возможна: в первой группе было 5 отличников, сказавших правду (ведь $20 > \frac{24}{2}$), а во второй группе было 20 хулиганов, сказавших неправду (ведь $19 \neq 3 \cdot 5$).

Ответ. 5 или 7

Задача 6. Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трёх чисел записали на доске, а затем всё, кроме трёх последних цифр этого произведения, стёрли. Какие три цифры могли остаться на доске?

Решение. Пусть a, b, c - данные числа. По условию, числа $a + b - c, b + c - a$ и $c + a - b$ делятся на 10. Значит, на 10 делится и сумма $s = a + b + c$ этих чисел. С другой стороны, из равенства $s = (a + b - c) + 2c$ и условия следует, что последняя цифра суммы всех трёх чисел равна последней цифре числа $2c$. Значит, число c оканчивается на 5 или на 0. Аналогично на 0 или на 5 оканчиваются числа a и b . Наконец, поскольку сумма s чётна, то и одно из чисел a, b, c также чётно. Итак, одно из этих чисел делится на 10, а два остальных — на 5. Тогда произведение делится на 250, а значит, может оканчиваться лишь на 250, 500, 750 или 000. Примеры троек чисел, удовлетворяющих условиям и дающих данные последние цифры: $10 \cdot 10 \cdot 1000; 5 \cdot 5 \cdot 10 = 250; 5 \cdot 5 \cdot 20 = 500; 5 \cdot 5 \cdot 30 = 750$.

Ответ. 000, 250, 500 или 750.

Задача 7. Все натуральные делители двузначного числа выписали в порядке возрастания. Оказалось, что четвёртый делитель на два больше второго, а шестой — на три больше третьего. Чему может быть равно это двузначное число?

Решение. Первый делитель числа равен 1. Из условия следует, что следующие пять делителей — последовательные числа. Из любых пяти последовательных чисел найдутся числа, кратные 3, 4 и 5, а так как каждые два из этих чисел взаимно просты, то искомое число делится на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. При этом оно двузначное, поэтому может быть равно только 60. Легко убедиться, что это число удовлетворяет условию.

Ответ. 60

Задача 8. Найти четырехзначное число, равное квадрату суммы двух двузначных чисел, образованных двумя первыми и двумя последними цифрами числа.

Решение. Обозначим двузначное число, образованное первыми двумя цифрами искомого числа N , через a , а число, образованное его двумя последними цифрами, — через b . В таком случае $N = 100a + b$, так что условие задачи дает $100a + b = (a + b)^2$ или $99a = (a + b)^2 - (a + b) = (a + b)(a + b - 1)$. (*)

Итак, произведение $(a + b)(a + b - 1)$ должно делиться на 99. Рассмотрим теперь отдельные возможные случаи.

1°. $a + b = 99k, a + b - 1 = \frac{a}{k}$. Так как a и b - двузначные числа, то $k \leq 2$; причем случай $k = 2$ сразу приводит к не удовлетворяющим основному равенству (*) значениям $a = 99, b = 99$. Таким образом, приходится считать, что $k = 1, a + b = 99, a = a + b - 1 = 98, N = 9801 = (98 + 1)^2$, но 1 не является двузначным числом.

2°. $a + b = 11m, a = a + b - 1 = 9n, mn = a$. В этом случае имеем $9n = 11m - 1$. Из того, что $11m - 1$ делится на 9, следует, что число m дает при делении на 9 остаток 5 (непосредственной проверкой убеждаемся, что если бы m давало при делении на 9 какой-либо другой остаток, то $11m - 1$ не делилось бы на 9). Итак, $m = 9t + 5$, откуда следует, что $9n = 99t + 54, n = 11t + 6$. Теперь имеем: $a = mn = (9t + 5)(11t + 6) = 99t^2 + 109t + 30$. Так как a число двузначное, то отсюда сразу вытекает, что $t = 0$. Следовательно, $a = 30, a = b = 11m = 55, b = 25, N = 3025 = (30 + 25)^2$.

3°. $a + b = 9m, a + b - 1 = 11n, mn = a$. Исследование, аналогичное тому, которое мы провели в случае 2°, дает единственный ответ $N = 2025 = (20 + 25)^2$.

4°. $a + b = 33m, a + b - 1 = 3n$ или $a + b = 3m, a + b - 1 = 33n$, что невозможно, так как $a + b$ и $a + b - 1$ числа взаимно простые.

5° : $a + b - 1 = 99k, a + b = \frac{a}{k}$. В этом случае имеем $a + b - 1 = 99, a + b = 100, a = \frac{(a+b)(a+b-1)}{99} = 100$ что невозможно.

Ответ. 3025 и 2025

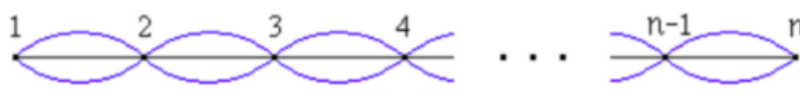
Задача 9. В любой группе из трёх приехавших в лагерь школьников либо все трое попарно знакомы (то есть все знают всех), либо знакома только одна пара людей (а третий человек людей из пары не знает). По приезде в лагерь у Андрея оказалось 50 друзей, а у Бориса — 40. Сколько школьников приехало в лагерь?

Решение. Очевидно, что Андрей и Борис не знакомы, иначе любой другой человек одновременно им друг или одновременно им не друг, что автоматически означает одинаковое количество друзей

у Андрея и Бориса, а оно разное. Кроме того, у Андрея и Бориса вообще нет общих друзей, так как в треугольнике Андрея и Бориса с этим общим другом будет только два знакомства. Также нет человека, которого бы не знал ни Андрей, ни Борис, в противном случае мы найдём треугольник из людей, где никто никого не знает. Всё вышеописанное означает, что все люди в лагере, кроме Андрея и Бориса, это их друзья, и никакой друг не посчитан дважды. Следовательно, в лагерь приехало $1 + 1 + 40 + 50 = 92$ школьника.

Ответ. 92 школьника.

Задача 10. На прямой расположено n городов, соединенных дорогами. Пешеход выходит из города 1. Он хочет пройти по всем дорогам, причём по каждой дороге только один раз. Сколько существует таких маршрутов? Маршруты считаются разными, если они отличаются последовательностью выбора дорог.



Решение. Назовем те города, в которых пешеход меняет направление движения, поворотными. Пусть их номера в порядке возрастания $C_1, C_2, \dots$

В первом городе путнику точно придется поворачивать, так что $C_1 = 1$. При движении от 1 до C_2 он двигался только вправо. Допустим, после этого он продолжит движение вправо. Тогда при следующем своем посещении C_2 он развернется и некоторые дороги между 1 и C_2 останутся непройденными. Значит, путник должен повернуть при первом своем посещении C_2 . После этого он пойдет до 1, там развернется и снова пойдет до C_2 . К этому моменту пройдены только все дороги от 1 до C_2 . Теперь можно принять C_2 за начальный город и продолжить те же рассуждения.

Из сказанного выше получается, что по набору поворотных городов последовательность посещения городов восстанавливается однозначно. Наборов поворотных городов существует 2^{n-2} , так как первый и последний города точно поворотные, а каждый из остальных городов можно выбрать поворотным независимо от других.

Теперь рассмотрим одну из таких последовательностей посещения городов. Выясним, сколько существует путей с такой последовательностью городов. В каждом промежутке между двумя соседними городами 3 дороги; есть $3! = 6$ способов выбрать, в каком порядке они встречаются в пути. Тогда упорядочить между собой дороги во всех промежутках всего 6^{n-1} способов. Значит, количество путей в 6^{n-1} больше, чем количество последовательностей городов (которых, как мы уже выяснили, 2^{n-2}).

Ответ. $2^{n-2} \cdot 6^{n-1}$

Задача 11. В настольной игре у героев есть 3 способности: сила, ум, отвага. Каждый игрок может выбрать для своего героя одну или две способности. Играют 32 игрока. Известно, что отважных героев (т. е. всех, имеющих способность отвага) в два раза больше умных и в k раз меньше, чем сильных (k — целое число, большее двух). Сколько игроков выбрали одну способность для героя, если известно, что игроков, выбравших 2 способности, на 2 больше, чем отважных?

Решение. Пусть x — количество умных, тогда отважных $2x$, а сильных $2kx$. Их суммарное количество больше 32, поскольку некоторые игроки выбрали две способности. Очевидно количество игроков, выбравших две способности, равно $x + 2x + 2kx - 32$. Тогда отважных будет $x + 2x + 2kx - 34$, откуда получаем уравнение: будет $x + 2x + 2kx - 34 = 2x$. Преобразовав, получим $x(2k + 1) = 34$. Таким образом $2k + 1$ делитель 34, следовательно, $k = 8$ и $x = 2$. Тогда отважных — 4, игроков, выбравших две способности — 6, а все остальные $32 - 6 = 26$ выбрали одну способность.

Ответ. 26

Задача 12. Для натурального $n > 3$ будем обозначать через $n?$ (n -вопросиал) произведение всех простых чисел, меньших n . Решите уравнение $n? = 2n + 16$.

Решение. Имеем $n? - 32 = 2(n - 8)$. Так как $n?$ не делится на 4, то $n - 8$ нечётно. Пусть $n > 9$, тогда $n - 8$ имеет нечётный простой делитель p . Так как $p < n$, то $n?$ делится на p . Значит, 32 делится на p , что невозможно. Мы получили, что $n \leq 9$ и нечётно. При $n = 9$ имеем $n? = 210 > 2 \cdot 9 + 16$. Число $n = 7$ — корень нашего уравнения, а при $n = 5$ имеем $n? = 6 < 16$.

Ответ. 7

Задача 13. Найдите все такие натуральные числа, в записи которых цифры не повторяются, все цифры одной четности, а сами числа являются точными квадратами.

Решение. Как известно, если квадрат оканчивается на нечётную цифру, то цифра десятков обязательно чётная. Поэтому нечётные квадраты могут быть только однозначными — 1 и 9. Чётные квадраты не могут оканчиваться на 0 (как минимум два нуля), 6 (цифра десятков нечётная), 2 и 8, значит, на конце цифра 4, а у самого числа, квадратом которого является, на конце 2 или 8. Также будем использовать, что квадраты по модулю 9 могут давать только остатки 0, 1, 4 и 7. Проверим числа от 2 до 32 (квадрат будет не более, чем трехзначным): подходят $2^2 = 4$, $8^2 = 64$. Квадрат не может быть пятизначным, так как его сумма цифр была бы равна $0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$, чего не может быть по модулю 9. Теперь понятно, что четырёхзначный квадрат состоит из цифр $\{0, 4, 6, 8\}$: 6804, 8604, 8064 — не квадраты, $6084 = 78^2$ ($\{0, 2, 4, 6\}$ остаток 3, $\{0, 2, 4, 8\}$ остаток 5, $\{0, 2, 6, 8\}$ нет цифры 4, $\{2, 4, 6, 8\}$ остаток 2).

Ответ. 1, 4, 9, 64, 6084

Задача 14. Петя записывает 9-значные числа. На первое место (самое левое) он пишет любую цифру от 1 до 9, на второе место — от 1 до 8, на третье — от 1 до 7, ..., на девятое (самое правое) — цифру 1. Сколько чисел, делящихся на 7, может получить Петя?

Решение. Всего Петя может выписать $9!$ разных чисел (для первой цифры есть 9 вариантов, для каждого из них есть 8 вариантов второй цифры и т.д.) Заметим, что вклад третьей слева цифры в остаток от деления числа на 7 равен ей самой (так как $1000000 - 1$ делится на 7). Разобьём возможные числа на наборы из 7 чисел, различающихся между собой третьей слева цифрой. В каждом наборе у чисел разные остатки от деления на 7, а значит, ровно одно из них делится на 7. Тогда подходит каждое седьмое число из возможных. Получаем ответ $9!/7 = 51840$.

Ответ. 51840

Задача 15. Дан параллелограмм $ABCD$ такой, что $\angle A = 60^\circ$. Пусть P и Q — середины сторон BC и CD соответственно. Оказалось, что точки A, P, Q, D лежат на одной окружности. Найдите $\angle ADB$.

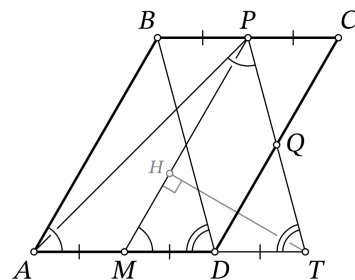
Решение. Пусть M — середина стороны AD . Продлим луч PQ до точки T такой, что $PQ = QT$. Так как диагонали четырёхугольника $PCTD$ пересекаются в своих серединах, это параллелограмм; отсюда получаем, что точка T лежит на прямой AD и $DT = CP = DM$.

Отметим, что $DBPT$ — параллелограмм (DT равен и параллелен PB), поэтому искомым $\angle ADB = \angle ATP$. С другой стороны, из вписанности $APQD$ имеем $\angle APQ = 180^\circ - \angle ADQ = 60^\circ$.

Кроме того, PM — средняя линия $ABCD$, и параллельна сторонам AB и CD , откуда получаем $\angle PMT = 60^\circ$. Значит, треугольники ATP и PTM подобны по двум углам. Тогда $AT : PT = PT : MT$, то есть $PT^2 = AT \cdot MT$.

Введём масштаб длин на чертеже так, чтобы отрезок AM имел длину 1; тогда $AT = 3$ и $MT = 2$, а $PT = \sqrt{6}$. Мы знаем один из углов треугольника MPT и две его стороны; теперь можно воспользоваться любым из известных методов, чтобы вычислить остальные его элементы (включая искомым угол ATP). Например, опустим высоту TH на прямую MP . Так как $TP > TM$, отрезки TP и TM окажутся по разные стороны от прямой TH . В прямоугольном треугольнике MTH гипотенуза равна 2, а угол напротив катета TH равен 60° , то есть сам катет равен $\sqrt{3}$. Теперь ясно, что прямоугольный треугольник THP равнобедренный, так как отношение гипотенузы к катету в нём равно $\sqrt{2}$. Получаем $\angle ATP = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

Ответ. 75°



Задача 16. У каждого составного числа от 1 до 170 нашли наименьший простой делитель. Найдите сумму обратных величин всех этих делителей.

Решение. Наименьший простой делитель составного числа всегда является простым. Возможные значения: 2, 3, 5, 7, 11, 13 (так как для $p \geq 17$ выполняется $p^2 > 170$).

Для каждого простого p найдём количество составных чисел $n \leq 170$, у которых наименьший простой делитель равен p . Эти числа имеют вид $n = p \cdot t$, где $t \geq 2$ и t не делится ни на одно простое число меньше p .

Для $p = 2$: $n = 2t \leq 170 \Rightarrow t \leq 85, t \geq 2$, ограничений нет. Количество чисел: 84. Вклад в сумму:

$$\frac{84}{2} = 42.$$

Для $p = 3 : n = 3m \leq 170 \Rightarrow m \leq 56, m$ нечётное. Количество чисел: 27. Вклад в сумму: $\frac{27}{3} = 9$.

Для $p = 5 : n = 5m \leq 170 \Rightarrow m \leq 34, m$ не делится на 2 и 3. Подходящие $m : 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31$ (10 чисел). Вклад в сумму: $\frac{10}{5} = 2$.

Для $p = 7 : n = 7m \leq 170 \Rightarrow m \leq 24, m$ не делится на 2, 3, 5. Подходящие $m : 7, 11, 13, 17, 19, 23$ (6 чисел). Вклад в сумму: $\frac{6}{7}$.

Для $p = 11 : n = 11m \leq 170 \Rightarrow m \leq 15, m$ не делится на 2, 3, 5, 7. Подходящие $m : 11, 13$ (2 числа). Вклад в сумму: $\frac{2}{11}$.

Для $p = 13 : n = 13m \leq 170 \Rightarrow m \leq 13, m$ не делится на 2, 3, 5, 7, 11. Подходящее $m : 13$ (1 число). Вклад в сумму: $\frac{1}{13}$.

$$\text{Сумма вкладов: } 42 + 9 + 2 + \frac{6}{7} + \frac{2}{11} + \frac{1}{13} = 53 + \frac{6}{7} + \frac{2}{11} + \frac{1}{13} = 53 + \frac{1117}{1001} = \frac{54170}{1001}.$$

Ответ. 54170/1001

Задача 17. За круглым столом сидят 2024 человека, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Каждый из сидящих за столом сообщил, что его соседи — рыцарь и лжец. Оказалось, что двое рыцарей ошиблись. Сколько лжецов за столом?

Решение. Заметим, что лжец не может сидеть между двумя лжецами (иначе за столом только лжецы, что противоречит условию), значит, соседи каждого лжеца — два рыцаря. Соседи рыцаря, который не ошибся — рыцарь и лжец. Выберем какого-нибудь лжеца, соседи которого не ошиблись (такой, очевидно, найдётся), и начнём обходить стол, например, по часовой стрелке от этого лжеца и его соседей. Последовательность будет состоять из троек вида РЛР, повторяющихся до тех пор, пока мы не встретим первого рыцаря, который ошибся. Здесь возможны два варианта (рыцарь, который ошибается, выделен жирным шрифтом): 1) РЛР...РЛР — тогда далее должен сидеть лжец, за ним снова рыцарь и так далее: РЛР...РЛРЛРРЛР...; 2) РЛР...РЛРР — здесь за ошибающимся рыцарем должен сидеть рыцарь: РЛР...РЛРРРЛР... То есть рыцарь, который ошибся, появляется, если в рассадку из повторяющихся троек РЛР добавить рыцаря между двумя другими или убрать рыцаря из такой рассадки. 2024 даёт остаток 2 при делении на 3, значит, такая рассадка могла быть получена только добавлением двух рыцарей. Итого за столом $(2024 - 2) : 3 = 674$ лжеца

Ответ. 674

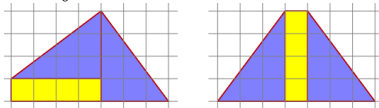
Задача 18. На птичьем базаре продают птиц. Известно, что более $\frac{1}{7}$ всех птиц составляют страусы, более $\frac{1}{3}$ всех птиц — голуби и более $\frac{1}{2}$ всех птиц — попугаи. Какое наименьшее количество птиц может продаваться на базаре?

Решение. Седьмая часть количества всех птиц представляется дробью со знаменателем 7, число страусов (целое) тоже можно представить в виде такой дроби, а две такие дроби отличаются хотя бы на $\frac{1}{7}$, значит, количество страусов хотя бы на $\frac{1}{7}$ больше седьмой части количества всех птиц. Аналогичные рассуждения верны и про голубей, и про попугаев. Имеем $\frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{41}{42}$. Тогда суммарное количество страусов, голубей и попугаев превышает $\frac{41}{42}$ количества всех птиц хотя бы на $\frac{41}{42}$. Но это превышение не может быть больше чем $\frac{1}{42}$ от количества всех птиц, значит, птиц не менее $\frac{41}{42} \cdot 42 = 41$. Легко видеть, что могло быть 6 страусов, 14 голубей и 21 попугай, всего 41 птица.

Ответ. 41

Задача 19. Постройте четырехугольник периметра 18, площади 16, все стороны которого имеют нечетную длину.

Решение. Такой четырехугольник можно нарисовать на клетчатой бумаге (сторона клетки равна 1). В обоих примерах четырехугольник составлен из прямоугольника 1×4 и двух прямоугольных треугольников с катетами 3 и 4 (площади $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$). Из теоремы Пифагора следует, что гипотенуза такого треугольника равна 5 (т.к. $3^2 + 4^2 = 5^2$). Теперь легко убедиться, что площади и периметры этих четырехугольников удовлетворяют условию: $4 + 6 + 6 = 16, 5 + 1 + 5 + 7 = 18$.



Ответ. Несколько примеров на рисунках.

Задача 20. Найдите все четырёхзначные числа $\overline{abcd}$ такие, что шестизначное число, полученное записью без пробелов двузначных чисел $\overline{ab} + 1, \overline{bc} + 2, \overline{cd} + 3$ подряд делится на 2025.

Решение. Число делится на 25, если его последние две цифры образуют число, кратное 25. Послед-

ние две цифры шестизначного числа — это $cd + 3$, которое может быть равно 25, 50 или 75. Отсюда: $cd + 3 = 25$, $cd = 22$, тогда $c = 2$, $d = 2$; $cd + 3 = 50$, $cd = 47$ тогда $c = 4$, $d = 7$; $cd + 3 = 75$, $cd = 72$ тогда $c = 7$, $d = 2$.

Шестизначное число N выражается как: $N = 100000a + 11000b + 110c + d + 10203$. По модулю 81: $N \equiv 46a + 65b + 29c + d + 78 \pmod{81}$. Для делимости на 81 необходимо: $46a + 65b + 29c + d + 78 \equiv 0 \pmod{81} \Rightarrow 46a + 65b + 29c + d \equiv 3 \pmod{81}$.

Случай 1: $c = 2, d = 2$ Подстановка в (1): $46a + 65b + 29 \cdot 2 + 2 \equiv 3 \pmod{81} \Rightarrow 46a + 65b + 60 \equiv 3 \pmod{81} \Rightarrow 46a + 65b \equiv 24 \pmod{81}$. Перебор $a = 1, \dots, 9$ и $b = 1, \dots, 9$ не даёт решений.

Случай 2: $c = 4, d = 7$. $46a + 65b + 29 \cdot 4 + 7 \equiv 3 \pmod{81} \Rightarrow 46a + 65b + 123 \equiv 3 \pmod{81}$. Так как $123 \equiv 42 \pmod{81}$, получаем: $46a + 65b \equiv 42 \pmod{81}$. Перебор даёт решения: $a = 9, b = 3 \Rightarrow abcd = 9347$, $a = 3, b = 6 \Rightarrow abcd = 3647$.

Случай 3: $c = 7, d = 2$. $46a + 65b + 29 \cdot 7 + 2 \equiv 3 \pmod{81} \Rightarrow 46a + 65b + 205 \equiv 3 \pmod{81}$. Так как $205 \equiv 43 \pmod{81}$, получаем: $46a + 65b \equiv 41 \pmod{81}$. Перебор даёт решение: $a = 3, b = 1 \Rightarrow abcd = 3172$.

Ответ. 3172, 3647, 9347

Задача 21. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $x^2 + xy + y^2 = x + 20$.

Решение. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно переменной x : $x^2 + (y - 1)x + (y^2 - 20) = 0$. Его дискриминант $D = (y - 1)^2 - 4(y^2 - 20) = 81 - 2y - 3y^2$ должен быть неотрицательным, то есть $3y^2 + 2y - 81 \leq 0$. Это неравенство выполняется при $y \in \left[\frac{-1-2\sqrt{61}}{3}; \frac{-1+2\sqrt{61}}{3} \right]$. В этом промежутке десять целых y от -5 до 4. Поскольку нужно найти пары целых чисел, то дискриминант D должен быть полным квадратом. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это будет при $y = -5; 0; 4$. - 1) Если $y = -5$, то $D = 16$ и получим уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$, имеющее целые корни 1 и 5, и значит, найдены две пары целых чисел $(1; -5)$ и $(5; -5)$. - 2) Если $y = 0$, то $D = 81$ и получим уравнение $x^2 - x - 20 = 0$, имеющее целые корни -4 и 5, и значит, найдены две пары целых чисел $(-4; 0)$ и $(5; 0)$. - 3) Если $y = 4$, то $D = 25$ и получим уравнение $x^2 + 3x - 4 = 0$, имеющее целые корни -4 и 1, и значит, найдены две пары целых чисел $(-4; 4)$ и $(1; 4)$. Таким образом, данному уравнению удовлетворяют шесть пар целых чисел: $(1; -5), (5; -5), (-4; 0), (5; 0), (-4; 4)$ и $(1; 4)$.

Ответ. $(1; -5), (5; -5), (-4; 0), (5; 0), (-4; 4), (1; 4)$.

Задача 22. Две стороны треугольника равны 34 и 32, а медиана, проведенная к третьей, равна 17. Найдите площадь треугольника.

Решение. Пусть данный треугольник — ABC , $AB = 34$, $BC = 32$, медиана $BM = 17$. Пусть N — середина AB . Тогда MN — средняя линия треугольника ABC , поэтому $MN = 16$. Кроме того $BN = \frac{AB}{2} = 17$. Значит, треугольник MNB равнобедренный. Его высота, опущенная на основание MN , находится по теореме Пифагора: $h = \sqrt{17^2 - \left(\frac{16}{2}\right)^2} = 15$. Значит, площадь треугольника MNB равна $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$. Осталось заметить, что площадь треугольника ABC в четыре раза больше.

Ответ. 480

Задача 23. Коле вдвое больше лет, чем было Оле, когда Коле было столько лет, сколько сейчас Оле. А когда Оле будет столько лет, сколько сейчас Коле, то им в сумме будет 36 лет. Сколько лет Коле сейчас?

Решение. Обозначим текущий возраст Коли через x лет, Оли — через y лет. Из условия: когда Коле было y лет (то есть $x - y$ лет назад), Оле было $y - (x - y) = 2y - x$ лет. По первому утверждению: $x = 2(2y - x)$, откуда $3x = 4y$ и $y = \frac{3}{4}x$. По второму утверждению: когда Оле будет x лет (через $x - y$ лет), Коле будет $x + (x - y) = 2x - y$ лет, и сумма возрастов составит $x + (2x - y) = 3x - y = 36$. Подставляя $y = \frac{3}{4}x$, получаем $3x - \frac{3}{4}x = \frac{9}{4}x = 36$, откуда $x = 16$.

Ответ. 16

Задача 24. Требуется сложить из 2010 спичек треугольник, одна из сторон которого вдвое больше другой. Необходимо использовать все спички. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Пусть длины сторон треугольника равны A , $2A$ и B спичек. Треугольника не получится, если стороны A и $2A$ вместе будут меньше B или если A и B вместе будут меньше, нежели $2A$. Первый случай: если $A + 2A \leq 2010 : 2 = 335 \cdot 3$. Тогда $A \leq 335$. Второй случай: если $B \leq A$. Тогда $2010 = 3A + B \leq 4A$, откуда $A \geq 503$. Значит, треугольник существует при значениях A от 336 до 502. То есть всего $502 - 335 = 167$ треугольников.

Ответ. 167