

Математическая игра «Лес». 9 классы



Задача 1. Натуральное число заканчивается на ноль, а наибольший из его делителей, не равных ему самому, является степенью простого числа. Найдите, чему может быть равна предпоследняя цифра этого числа.

Задача 2. В треугольнике ABC нашлась точка P , такая что $\angle CBP = \angle BCP = 10^\circ$, $\angle ABP = 70^\circ$, $\angle ACP = 40^\circ$. Найдите $\angle CAP$.

Задача 3. Простые числа p, q, r таковы, что $p + q + r = 118$, $pq + qr + rp = 2075$. Найдите произведение pqr .

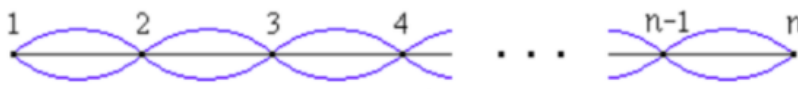
Задача 4. На оси Ox отмечены точки $0 = A_0 < A_1 < \dots < A_n$, на графике $y = \sqrt{x}$ — точки $B_1, \dots, B_n$ так, что каждый треугольник $A_{k-1}A_kB_k$ — равносторонний. Известно, что высота последнего треугольника равна h . Чему равна сумма длин высот всех треугольников?

Задача 5. По кругу расставили 1000 чисел, среди которых нет нулей, и раскрасили их поочередно в белый и чёрный цвета. Оказалось, что каждое чёрное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним чёрных чисел. Чему может быть равна сумма всех расставленных чисел?

Задача 6. При каких натуральных x выражение $x^2 - 4x + 11$ является квадратом натурального числа?

Задача 7. Сколько (максимум) кругов можно расположить на плоскости так, чтобы любые два из них пересекались, а никакие три — нет?

Задача 8. На прямой расположено n городов, соединенных дорогами. Пешеход выходит из города 1. Он хочет пройти по всем дорогам, причём по каждой дороге только один раз. Сколько существует таких маршрутов? Маршруты считаются разными, если они отличаются последовательностью выбора дорог.



Задача 9. Какие три цифры нужно дописать справа к числу 579, чтобы полученное шестизначное число делилось на 5, на 7 и на 9?

Задача 10. На птичьем базаре продают птиц. Известно, что более $\frac{1}{7}$ всех птиц составляют страусы, более $\frac{1}{3}$ всех птиц — голуби и более $\frac{1}{2}$ всех птиц — попугаи. Какое наименьшее количество птиц может продаваться на базаре?

Задача 11. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\text{НОК}(x,y)} + \frac{1}{\text{НОД}(x,y)} = 1$.

Задача 12. Сторона AB треугольника ABC больше стороны BC , а угол B равен 40° . На стороне AB взята точка P так, что $BP = BC$. Биссектриса BM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке T . Найдите угол MPT .

Задача 13. Найдите все четырёхзначные числа $\overline{abcd}$ такие, что шестизначное число, полученное записью без пробелов двузначных чисел $\overline{ab} + 1, \overline{bc} + 2, \overline{cd} + 3$ подряд делится на 2025.

Задача 14. Найдите 2025-й член последовательности, нулевой член которой a_0 равен нулю, а $a_{n+1} = \frac{2}{3-a_n}$.

Задача 15. Клетчатый квадрат 99×99 разрезан на прямоугольники по границам клеток. Прямоугольники раскрашены в три цвета так, чтобы прямоугольники одного цвета не соприкасались даже углами. Какое наибольшее число прямоугольников может быть?

Задача 16. Известно, что a, b, c, d - попарно различные положительные двузначные числа. Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 4b$ и $c > 7d$?

Задача 17. Сколько существует таких приведённых квадратных трёхчленов $f(x) = x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами, что $f(f(1000)) = 0$?

Задача 18. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 . На стороне AB выбрана точка P так, что окружность, описанная около треугольника PA_1B_1 , касается стороны AB . Найдите PC_1 , если $PA = 30$ и $PB = 10$.

Задача 19. В спортивной школе занимается 55 человек, каждый из которых либо теннисист, либо шахматист. Известно, что нет четырёх шахматистов, которые имели бы поровну друзей среди теннисистов. Какое наибольшее количество шахматистов может заниматься в этой школе?

Задача 20. На ярмарке школьных поделок Петя купил несколько блокнотов на 1978 фантиков. Затем он передумал и три блокнота вернул обратно. Часть возвращенных фантиков он истратил на шоколадку за 140 фантиков. Сколько блокнотов купил Петя?

Задача 21. На доске были написаны числа $1, 2, 3, \dots, 235$. Петя стёр несколько из них. Оказалось, что среди оставшихся чисел никакое не делится на разность никаких двух других. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

Задача 22. Володя бежит по круговой дистанции с постоянной скоростью. В двух точках дистанции стоит по фотографу. После старта Володя 2 минуты был ближе к первому фотографу, затем 3 минуты – ближе ко второму фотографу, а потом снова ближе к первому. За какое время Володя пробежал весь круг?

Задача 23. Максим считает от 1 до 10000, пропуская все числа, делящиеся на 3, и все числа, заканчивающиеся на цифру 3. Сколько чисел он назовет?

Задача 24. На плоскости нарисован правильный пятиугольник $ABCDE$. Лёня хочет раскрасить его стороны фломастерами трех цветов так, чтобы каждая сторона была бы одного цвета, а любые две стороны одного цвета не имели бы общих вершин. Сколькими способами Лёня сможет это сделать?