Математическая игра «Лес». 9 классы.
Решения и ответы

Задача 1. Натуральное число заканчивается на ноль, а наибольший из его делителей, не равных ему самому, является степенью простого числа. Найдите, чему может быть равна предпоследняя цифра этого числа.
Решение. Натуральное число делится на 2 и 5. Тогда его наибольший собственный делитель - половина числа, а само число имеет вид $2 \cdot 5^k$. При $k = 1$ предпоследняя цифра будет 1 , а при $k > 1$ будет 5, так как 5^k в этом случае оканчивается на 25.
Ответ. 1, 5

Задача 2. В треугольнике ABC нашлась точка P, такая что $\angle CBP = \angle BCP = 10°$, $\angle ABP = 70°$, $\angle ACP = 40°$. Найдите $\angle CAP$.
Решение. Ясно, что треугольник ABC — р/б. Отразим точку P относительно биссектрисы угла B — получим точку P'. Треугольник $P'BP$ — р/с, а далее очевидно.
Ответ. $20°$

Задача 3. Простые числа p, q, r таковы, что $p + q + r = 118, pq + qr + rp = 2075$. Найдите произведение pqr.
Решение. Так как сумма трех целых чисел четна, то они не могут быть все нечетными. Единственное четное простое число - это 2. Пусть, например, $r = 2$ (очевидно, что все переменные равноправны). Тогда условие примет вид:

$$\begin{cases} p+q+2=118; \\ pq+2p+2q=2075; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p+q=116; \\ pq+2(p+q)=2075; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p+q=116; \\ pq=1843. \end{cases}$$

Так как $pq = 1843$, а $r = 2$, то $pqr = 3686$. Можно было и не раскладывать 1843 на простые множители, а просто выразить в первом уравнении q через p, подставить во второе, и решить квадратное уравнение на p.
Ответ. 3686

Задача 4. На оси Ox отмечены точки $0 = A_0 < A_1 < \ldots < A_n$, на графике $y = \sqrt{x}$ — точки B_1, $\ldots$, B_n так, что каждый треугольник $A_{k-1}A_kB_k$ — равносторонний. Известно, что высота последнего треугольника равна h. Чему равна сумма длин высот всех треугольников?
Решение. Обозначим через s_k длину стороны k-го равностороннего треугольника, а через H_k - его высоту. Тогда $H_k = \frac{s_k\sqrt{3}}{2}$. Из условия задачи следует, что для каждого k выполняется соотношение: $A_{k-1} = \frac{3}{4}s_k^2 - \frac{s_k}{2}$, где $A_{k-1} = s_1 + s_2 + \ldots + s_{k-1}$.

Запишем $A_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2i}{3} = \frac{(k-1)k}{3}$, $\frac{3}{4}s_k^2 - \frac{s_k}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4k^2}{9} - \frac{k}{3} = \frac{k^2}{3} - \frac{k}{3} = \frac{k(k-1)}{3}$, тогда $s_k = \frac{2k}{3}$.

Тогда высота k-го треугольника: $H_k = \frac{s_k\sqrt{3}}{2} = \frac{2k\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{k\sqrt{3}}{3}$.

Сумма высот всех треугольников: $\sum_{k=1}^{n} H_k = \frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)\sqrt{3}}{6}$.

По условию, высота последнего треугольника равна h: $H_n = \frac{n\sqrt{3}}{3} = h \quad \Rightarrow \quad n = \frac{3h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$. Подставляем $n = h\sqrt{3}$ в сумму высот:

$$\sum H_k = \frac{h\sqrt{3}(h\sqrt{3}+1)\sqrt{3}}{6} = \frac{h \cdot 3(h\sqrt{3}+1)}{6} = \frac{3h^2\sqrt{3}+3h}{6} = \frac{h^2\sqrt{3}}{2} + \frac{h}{2}.$$

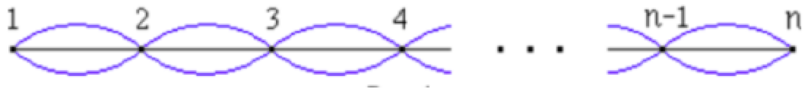
Ответ. $h^2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{h}{2}$

Задача 5. По кругу расставили 1000 чисел, среди которых нет нулей, и раскрасили их поочередно в белый и чёрный цвета. Оказалось, что каждое чёрное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним чёрных чисел. Чему может быть равна сумма всех расставленных чисел?
Решение. Возьмем чёрное число a и рядом с ним белое число ab. По этим числам следующие шесть восстанавливаются однозначно: $b, b - ab, 1 - a, (1 - a)(1 - b)$, $1 - b, a(1 - b)$. Сумма этих 8 чисел равна 3. Имеющиеся 1000 чисел разбиваются на 125 таких восьмёрок, отсюда ответ.
Ответ. 375

Задача 6. При каких натуральных x выражение $x^2 - 4x + 11$ является квадратом натурального числа?
Решение. Имеем $(x-2)^2 + 7 = y^2$, откуда $\begin{cases} x-2-y = -7, -1, 1, 7 \\ x-2+y = 1, 7, -7, -1 \end{cases}$. Получаем $\begin{cases} x = -2, 5, -2, 5 \\ y = 4, 4, -4, -4 \end{cases}$
Ответ. 5

Задача 7. Сколько (максимум) кругов можно расположить на плоскости так, чтобы любые два из них пересекались, а никакие три — нет?
Решение. Решение. Рассмотрим какой-нибудь из n кругов. Пусть A_iB_i — его общие хорды с остальными кругами. Так как никакие три круга не пересекаются, для любой из хорд A_iB_i одна из стягиваемых ею дуг не содержит концов остальных хорд. Отрежем от каждого круга сегменты, ограниченные этими дугами, и получим n выпуклых областей, любые две из которых граничат друг с другом. Известно, что таких областей на плоскости может быть не больше четырех. Очевидно, что четыре круга расположить требуемым образом можно.
Ответ. 4

Задача 8. На прямой расположено n городов, соединенных дорогами. Пешеход выходит из города 1. Он хочет пройти по всем дорогам, причём по каждой дороге только один раз. Сколько существует таких маршрутов? Маршруты считаются разными, если они отличаются последовательностью выбора дорог.



Решение. Назовем те города, в которых пешеход меняет направление движения, поворотными. Пусть их номера в порядке возрастания $C_1, C_2, \ldots$

В первом городе путнику точно придется поворачивать, так что $C_1 = 1$. При движении от 1 до C_2 он двигался только вправо. Допустим, после этого он продолжит движение вправо. Тогда при следующем своем посещении C_2 он развернется и некоторые дороги между 1 и C_2 останутся непройденными. Значит, путник должен повернуть при первом своем посещении C_2. После этого он пойдет до 1 , там развернется и снова пойдет до C_2. К этому моменту пройдены только все дороги от 1 до C_2. Теперь можно принять C_2 за начальный город и продолжить те же рассуждения.

Из сказанного выше получается, что по набору поворотных городов последовательность посещения городов восстанавливается однозначно. Наборов поворотных городов существует 2^{n-2}, так как первый и последний города точно поворотные, а каждый из остальных городов можно выбрать поворотным независимо от других.

Теперь рассмотрим одну из таких последовательностей посещения городов. Выясним, сколько существует путей с такой последовательностью городов. В каждом промежутке между двумя соседними городами 3 дороги; есть $3! = 6$ способов выбрать, в каком порядке они встречаются в пути. Тогда упорядочить между собой дороги во всех промежутках всего 6^{n-1} способов. Значит, количество путей в 6^{n-1} больше, чем количество последовательностей городов (которых, как мы уже выяснили, 2^{n-2}).
Ответ. $2^{n-2} \cdot 6^{n-1}$

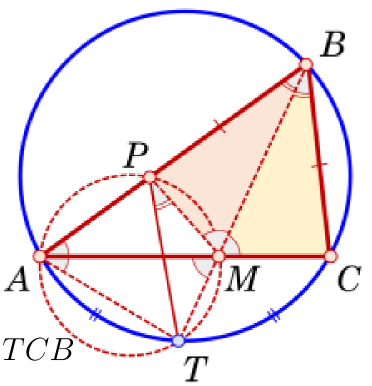
Задача 9. Какие три цифры нужно дописать справа к числу 579, чтобы полученное шестизначное число делилось на 5, на 7 и на 9?
Решение. Разделим 579000 на 315 с остатком — остаток 30. Значит, искомое трехзначное число должно давать остаток 285 при делении на 315.
Ответ. 285, 600, 915

Задача 10. На птичьем базаре продают птиц. Известно, что более $\frac{1}{7}$ всех птиц составляют страусы, более $\frac{1}{3}$ всех птиц — голуби и более $\frac{1}{2}$ всех птиц — попугаи. Какое наименьшее количество птиц может продаваться на базаре?
Решение. Седьмая часть количества всех птиц представляется дробью со знаменателем 7 , число страусов (целое) тоже можно представить в виде такой дроби, а две такие дроби отличаются хотя бы на $\frac{1}{7}$, значит, количество страусов хотя бы на $\frac{1}{7}$ больше седьмой части количества всех птиц. Ана-

логичные рассуждения верны и про голубей, и про попугаев. Имеем $\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{41}{42}$. Тогда суммарное количество страусов, голубей и попугаев превышает $\frac{41}{42}$ количества всех птиц хотя бы на $\frac{41}{42}$. Но это превышение не может быть больше чем $\frac{1}{42}$ от количества всех птиц, значит, птиц не менее $\frac{41}{42}\cdot 42=41$. Легко видеть, что могло быть 6 страусов, 14 голубей и 21 попугай, всего 41 птица.
Ответ. 41

Задача 11. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\text{НОК}(x,y)}+\frac{1}{\text{НОД}(x,y)}=1$.
Решение. Заметим сначала, что в знаменателях нет единицы. Более того, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}<1$. Значит, среди или среди знаменателей есть двойка, или есть хотя бы одно равенство. Любое равенство приводит либо к случаю $x=y$, и тогда ясно, что $x=y=4$, или к случаю $x=ky$. В последнем случае $\frac{2}{ky}+\frac{2}{y}=1$, то есть $ky=2+2k$. Решения: $k=2, y=3; k=1, y=4$. Новое решение: $x=6, y=3$ и симметричное. Значит, остался случай НОД $(x,y)=2$. Умножим все равенство на xy. Учитывая $xy=$ НОД $(x,y)\cdot$ НОК (x,y), получим $x+y+2+\frac{xy}{2}=xy$, откуда следует, что $(x-2)(y-2)=8$. Так как x,y четные, то $x=4, y=6$ и симметрично (заметим, что вариант $x-2=-2$ невозможен).
Ответ. $(4;4),(3;6),(6;3),(4;6),(6;4)$

Задача 12. Сторона AB треугольника ABC больше стороны BC, а угол B равен $40°$. На стороне AB взята точка P так, что $BP=BC$. Биссектриса BM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке T. Найдите угол MPT.



Решение. В четырехугольнике $APMT$ угол при вершине A измеряется половиной дуги TCB. Треугольники PMB и CMB равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle PMB=\angle CMB=\angle AMT$. Угол AMT измеряется полусуммой дуг AT и CB, причём:

$$\frac{1}{2}(\smile AT+\smile CB)=\frac{1}{2}(\smile TC+\smile CB)=\frac{1}{2}\smile TCB$$

Значит, $\angle CMB=\angle BAT$. Таким образом, $\angle PMB=\angle BAT$ и $\angle BAT+\angle PMT=\angle BAT+(180°-\angle PMB)=180°$. Следовательно, сумма противоположных углов четырехугольника $APMT$ равна $180°$, и значит, $APMT$ вписанный. По свойству вписанных углов $\angle MPT=\angle MAT=\angle CAT=\angle TBC=\frac{1}{2}\angle ABC=20°$.
Ответ. $20°$

Задача 13. Найдите все четырёхзначные числа $\overline{abcd}$ такие, что шестизначное число, полученное записью без пробелов двузначных чисел $\overline{ab}+1$, $\overline{bc}+2$, $\overline{cd}+3$ подряд делится на 2025.
Решение. Число делится на 25, если его последние две цифры образуют число, кратное 25. Последние две цифры шестизначного числа — это $cd+3$, которое может быть равно 25,50 или 75. Отсюда: $cd+3=25$, $cd=22$, тогда $c=2$, $d=2$; $cd+3=50$, $cd=47$ тогда $c=4$, $d=7$; $cd+3=75$, $cd=72$ тогда $c=7$, $d=2$.

Шестизначное число N выражается как: $N=100000a+11000b+110c+d+10203$. По модулю 81: $N\equiv 46a+65b+29c+d+78 \pmod{81}$. Для делимости на 81 необходимо: $46a+65b+29c+d+78\equiv 0 \pmod{81} \Rightarrow 46a+65b+29c+d\equiv 3 \pmod{81}$.

Случай 1: $c=2, d=2$ Подстановка в (1): $46a+65b+29\cdot 2+2\equiv 3 \pmod{81} \Rightarrow 46a+65b+60\equiv 3 \pmod{81} \Rightarrow 46a+65b\equiv 24 \pmod{81}$. Перебор $a=1,\dots,9$ и $b=1,\dots,9$ не даёт решений.

Случай 2: $c=4, d=7$. $46a+65b+29\cdot 4+7\equiv 3 \pmod{81} \Rightarrow 46a+65b+123\equiv 3 \pmod{81}$. Так как $123\equiv 42 (\text{mod} 81)$, получаем: $46a+65b\equiv 42 \pmod{81}$. Перебор даёт решения: $a=9, b=3 \Rightarrow abcd=9347$, $a=3, b=6\Rightarrow abcd=3647$.

Случай 3: $c=7, d=2$. $46a+65b+29\cdot 7+2\equiv 3 \pmod{81} \Rightarrow 46a+65b+205\equiv 3 \pmod{81}$. Так как $205\equiv 43 (\text{mod} 81)$, получаем: $46a+65b\equiv 41 \pmod{81}$. Перебор даёт решение: $a=3, b=1\Rightarrow abcd=3172$.
Ответ. 3172, 3647, 9347

Задача 14. Найдите 2025-й член последовательности, нулевой член которой a_0 равен нулю, а $a_{n+1}=\frac{2}{3-a_n}$.
Решение. Очень просто доказать по индукции, что $a_n=\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$.
Ответ. $\frac{2^{2026}-2}{2^{2026}-1}$

Задача 15. Клетчатый квадрат 99×99 разрезан на прямоугольники по границам клеток. Прямоугольники раскрашены в три цвета так, чтобы прямоугольники одного цвета не соприкасались даже углами. Какое наибольшее число прямоугольников может быть?
Решение. *Оценка.* В каждом узле сетки могут быт прямоугольники не более, чем двух цветов. Если есть три цвета, то четвертый совпадает с каким-то из этих трёх. Узлов всего $100 * 100 = 10\ 000$. Но в углах квадрата может быть только 1 цвет. Всего углов прямоугольников $9996 * 2 + 4 = 19996$. Значит, прямоугольников не больше 4999.
Пример. Очевиден.
Ответ. 4999

Задача 16. Известно, что a, b, c, d - попарно различные положительные двузначные числа. Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 4b$ и $c > 7d$?
Решение. Так как все числа натуральные, то из $a > 4b$ можно сделать вывод, что $a \geqslant 4b + 1$. Аналогично $c \geqslant 7d + 1$. С учетом этого оценим дробь:

$$\frac{a+c}{b+d} \geqslant \frac{4b+1+7d+1}{b+d} = 4 + \frac{3d+2}{b+d}$$

Таким образом, наименьшее значение выражение будет принимать при наименьшем значении выражения $\frac{3d+2}{b+d}$. Так как при фиксированном числителе дробь тем меньше, чем больше ее знаменатель, то максимизируем знаменатель, то есть максимизируем b. Так как a - двузначное, то максимальное значение для a - это 99 , следовательно, $4b + 1 \leqslant 99$ и $b \leqslant 24$. Таким образом, получаем:

$$\frac{a+c}{b+d} \geqslant 4 + \frac{3d+2}{24+d} = 4 + \frac{3(d+24)+2-72}{d+24} = 4 + 3 - \frac{70}{d+24}$$

Теперь для того, чтобы полученное справа выражение было как можно меньше, нужно сделать как можно больше дробь $\frac{70}{d+24}$, то есть сделать как можно меньше d. Наименьшее значение для d — это 10. Следовательно: $\frac{a+c}{b+d} \geqslant 4 + 3 - \frac{70}{10+24} = 4\frac{16}{17}$.

Таким образом, если наименьшее значение $4\frac{16}{17}$ достигается, то $b = 24, d = 10, a = 4 \cdot 24 + 1 = 97, c = 7 \cdot 10 + 1 = 71$.
Ответ. 4 16/17

Задача 17. Сколько существует таких приведённых квадратных трёхчленов $f(x) = x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами, что $f(f(1000)) = 0$?
Решение. Пусть $a = f(1000)$, из условия следует, что a - корень многочлена $f(x)$. Обозначим, второй корень за b, тогда верно $f(x) = (x-a)(x-b)$. Заметим, что $p = -(a+b)$, при этом a и p - целые, тогда и b — целое. С другой стороны, распишем число a: $a = f(1000) = (1000-a)(1000-b), b = 1000 - \frac{a}{1000-a}$.

Число b целое тогда и только тогда, когда $\frac{a}{1000-a}$ — целое. Таким образом задача свелась к такой: сколько существует целых a, таких что $\frac{a}{1000-a}$ — целое. Посчитаем число таких a. Заметим, что $1000 \equiv a (\mathrm{mod} 1000 - a)$, поэтому 1000 делится на $1000 - a$. Откуда следует, что $1000 - a$ — целый делитель 1000. Число целых делителей $1000 = 2^3 \cdot 5^3$, равно $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$.
Ответ. 32

Задача 18. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. На стороне AB выбрана точка P так, что окружность, описанная около треугольника PA_1B_1, касается стороны AB. Найдите PC_1, если $PA = 30$ и $PB = 10$.
Решение. Продлим отрезки AB и B_1A_1 до пересечения в точке K и обозначим длину $KB = x$. Так как произведения отрезков секущих, проведенных из одной точки, равны: $KA_1 \cdot KB_1 = KA \cdot KB$. А также квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей, проведенной из той же точки, поэтому $KP^2 = KA_1 \cdot KB_1$. Следовательно $KP^2 = KA \cdot KB$. Выразив эти отрезки через x получим $x = 5$ и $KP = 15$. Отметим M - середину стороны BA. Основания высот A_1, B_1, C_1 и точка M лежат на одной окружности(окружность девяти точек). Тогда $KC_1 \cdot KM = KA_1 \cdot KB_1$ по свойству отрезков секущих, проведенных из одной точки K. А также имеем $KP^2 = KA_1 \cdot KB_1$. И так как $KP = 15, KM = 25$, получаем $KC_1 \cdot 25 = 225 \implies KC_1 = 9 \implies PC_1 = 6$.
Ответ. 6

Задача 19. В спортивной школе занимается 55 человек, каждый из которых либо теннисист, либо шахматист. Известно, что нет четырёх шахматистов, которые имели бы поровну друзей среди теннисистов. Какое наибольшее количество шахматистов может заниматься в этой школе?
Решение. Пусть в школе занимаются a теннисистов и $55 - a$ шахматистов. У каждого из шахматистов количество друзей-теннисистов не меньше 0 и не больше a, то есть может принимать $a + 1$ значений. Если бы шахматистов было больше $3(a + 1)$, среди них по принципу Дирихле нашлись четверо с одинаковым количеством друзей-теннисистов. Значит, шахматистов не больше $3(a + 1)$, получаем неравенство $55 - a \leqslant 3(a + 1)$. Решая его, получаем $a \geqslant 13$, тогда $55 - a \leqslant 55 - 13 = 42$. Заметим также, что ровно 42 шахматиста могло быть: пусть для каждого целого $0 \leqslant k \leqslant 13$ какие-то трое шахматистов имеют ровно k произвольных друзей-теннисистов.
Ответ. 42

Задача 20. На ярмарке школьных поделок Петя купил несколько блокнотов на 1978 фантиков. Затем он передумал и три блокнота вернул обратно. Часть возвращенных фантиков он истратил на шоколадку за 140 фантиков. Сколько блокнотов купил Петя?
Решение. Три блокнота стоят более 140 фантиков. Значит, один блокнот — более $[140 : 3] = 46$ фантиков. С другой стороны, $1978 = 2 \cdot 23 \cdot 43$, единственный его делитель, больший 46, равен 86. Значит, Петя купил 23 блокнота по 86 фантиков.
Ответ. 23

Задача 21. На доске были написаны числа 1, 2, 3, …, 235. Петя стёр несколько из них. Оказалось, что среди оставшихся чисел никакое не делится на разность никаких двух других. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?
Решение. На доске могло остаться 118 нечётных чисел: любое из них не делится на разность никаких двух других, потому что эта разность чётна. Предположим, могло остаться хотя бы 119 чисел. Рассмотрим 118 множеств: 117 пар $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$, …, $(233, 234)$ и одно число 235 По принципу Дирихле в одном из множеств осталось хотя бы два числа. Это означает, что среди оставшихся чисел найдутся два последовательных, но тогда их разность, равная 1, является делителем любого другого оставшегося числа. Противоречие.
Ответ. 118

Задача 22. Володя бежит по круговой дистанции с постоянной скоростью. В двух точках дистанции стоит по фотографу. После старта Володя 2 минуты был ближе к первому фотографу, затем 3 минуты — ближе ко второму фотографу, а потом снова ближе к первому. За какое время Володя пробежал весь круг?
Решение. Отметим первого и второго фотографа на круге с помощью точек A и B соответственно, точками C и D обозначим середины дуг, соединяющих A и B. Тогда на полуокружности CAD Володя ближе к первому фотографу, а на полуокружности CBD (обозначенной жирным на рисунке) — ближе ко второму. По условию ближе ко второму фотографу он был в течение 3 минут. Следовательно, весь круг он пробегает за 6 минут.
Ответ. 6 минут

Задача 23. Максим считает от 1 до 10000, пропуская все числа, делящиеся на 3, и все числа, заканчивающиеся на цифру 3. Сколько чисел он назовет?
Решение. Достаточно простой подсчёт $10000 - 3333 - 1000 + 334 = 6001$ приводит к ответу.
Ответ. 6001

Задача 24. На плоскости нарисован правильный пятиугольник $ABCDE$. Лёня хочет раскрасить его стороны фломастерами трех цветов так, чтобы каждая сторона была бы одного цвета, а любые две стороны одного цвета не имели бы общих вершин. Сколькими способами Лёня сможет это сделать?
Решение. Хотелось бы доказать, что цвета по пятиугольнику идут так $xyzyz$. Тогда всего пять вариантов выбора, какое ребро будет иметь цвет x, и 3 ! выборов цветов x, y, z. Сначала заметим, что есть расположение цветов вида xyx. Действительно, если его нет, то есть xyz, затем $xyzx$, но тогда пятое ребро приводит к противоречию. Набор цветов xyx можно продолжить как $yxyxz$ и как $zxyxy$. В любом случае расположение цветов имеет требуемый тип.
Ответ. 30