Математическая игра «Спектр». 10-11 классы. Решения и ответы

Задача 1. Число называется палиндромом, если оно не изменяется при перестановке цифр в обратном порядке. Найдите самое большое 6-значное число N такое, что числа N и $3N$ одновременно являются числами-палиндромами.
Решение. Докажем, что число $3N$ не может быть семизначным. От противного: если это так, то так как оно втрое больше шестизначного, то старшая цифра 1, или 2. Если первая цифра 1, то последняя цифра тоже 1, тогда число N заканчивалось на цифру 7, но в этом случае число $3N$ не могло начинаться с 1, а начинается с цифры 2. Тогда оно и заканчивается на цифру 2, а число N заканчивается на цифру 4 . Но тогда оно и начинается с цифры 4, а, значит, число $3N$ начинается с цифры 1, а не 2. Получили, что число $3N$ не может быть семизначным. Значит, оно шестизначное, наибольшее такое число 999999, а $N = 333333$.
Ответ. 333333

Задача 2. Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1 и меньше этого числа. Наименьший собственный делитель натурального числа равен a. Наибольший собственный делитель этого числа равен $a^6 + 6$. Чему может быть равно это число?
Решение. Пусть N — натуральное число, у которого наименьший собственный делитель равен a, а наибольший собственный делитель равен $a^6 + 6$. Ясно, что a — простое число, а $N = a(a^6 + 6) = a^7 + 6a$.

Все простые делители числа a^6+6 должны быть не меньше a, чтобы a оставалось наименьшим простым делителем N.

При $a > 7$: по малой теореме Ферма $a^6 \equiv 1 \pmod 7$, поэтому $a^6 + 6 \equiv 0 \pmod 7$, значит, $a^6 + 6$ делится на 7, что меньше a, поэтому условие не выполняется.

Перебор простых $a \leqslant 7$: при $a = 2$: $a^6+6 = 70$, $N = 140$ (наименьший собственный делитель 2, наибольший 70);
при $a = 3$: $a^6 + 6 = 735$, $N = 2205$ (наименьший собственный делитель 3, наибольший 735);
при $a = 5$: $a^6+6 = 15631$, $N = 78155$.(наименьший собственный делитель 5, наибольший 15631);
при $a = 7$: $a^6 + 6 = 117655$ делится на 5, что меньше 7 — не подходит.
Ответ. 140, 2205, 78155

Задача 3. Графиком функции $y = f(x)$ является прямая. Найдите эту функцию, если известно, что для всех x выполняется равенство: $f(f(x + 20)) + 25 = 20f(x + 2) + 5$.
Решение. Поскольку график функции $y = f(x)$ — прямая, то $f(x) = ax + b$. Подставляя в данное уравнение $f(f(x + 20)) + 25 = 20f(x + 2) + 5$, получаем систему:

$$a^2 = 20a, \quad 20a^2 + ab + b + 25 = 40a + 20b + 5.$$

Из первого уравнения $a = 0$ или $a = 20$. При $a = 0$ находим $b = \frac{20}{19}$. При $a = 20$ подстановка даёт $b = -7220$.
Ответ. $f(x) = \frac{20}{19}$, $f(x) = 20x - 7220$

Задача 4. Сколькими способами можно разменять сумму в 105 рублей монетами 1, 2 и 5 рублей? Способы считаются различными, если в них разное количество хотя бы одного вида монет. В размене не обязательно должны участвовать все три вида монет одновременно.
Решение. Пусть y — количество монет по 2 рубля, z — по 5 рублей. Тогда количество монет по 1 рублю:

$$x = 105 - 2y - 5z \geqslant 0,$$

откуда $2y + 5z \leqslant 105$. Максимальные значения: $y \in [0, 52]$ (так как $2 \cdot 52 = 104 \leqslant 105$), $z \in [0, 21]$ (так как $5 \cdot 21 = 105$). Общее число пар (y, z):

$$53 \times 22 = 1166.$$

Рассмотрим инволюцию:

$$(y, z) \mapsto (52 - y, 21 - z).$$

Тогда новая сумма:

$$T' = 2(52 - y) + 5(21 - z) = 104 - 2y + 105 - 5z = 209 - T, \quad \text{где } T = 2y + 5z.$$

Это биекция на множестве всех пар, и она переводит множество $T \leqslant 105$ в множество $T \geqslant 104$. Следовательно,

$$\#(T \leqslant 105) = \#(T \geqslant 104).$$

Обозначим $N = \#(T \leqslant 105)$. Тогда

$$N + N = 1166 + \#(104 \leqslant T \leqslant 105),$$

поскольку пары с $T \in \{104, 105\}$ учитываются в обоих множествах. Найдём количество таких пар:

- $T = 104$: $2y + 5z = 104$. Так как 104 чётно, z чётно: $z = 2k$, тогда $y = 52 - 5k$. Условия: $k \in [0, 10] \to 11$ решений. - $T = 105$: $2y + 5z = 105$. Так как 105 нечётно, z нечётно: $z = 2k + 1$, тогда $y = 50 - 5k$. Условия: $k \in [0, 10] \to 11$ решений.

Итого: $\#(104 \leqslant T \leqslant 105) = 11 + 11 = 22$. Тогда:

$$2N = 1166 + 22 = 1188 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1188}{2} = 594.$$

Ответ. 594

Задача 5. Для натурального k определим последовательность $a_1, a_2, \ldots$ условиями $a_1 = k + 1$ и $a_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_n + k$ при всех натуральных n. При каких k в этой последовательности бесконечно много точных квадратов?

Решение. Заметим, что $a_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_n + k = a_n (a_n - k) + k$. С помощью полученного равенства по индукции легко проверить, что при нечётном k число a_n даёт при делении на 4 остаток 3 для всех $n \geqslant 2$, и потому в последовательности a_n не более одного точного квадрата. Если же k чётно, то $a_{n+1} = a_n (a_n - k) + k = (a_n - k/2)^2 + (k - k^2/4)$. Поскольку a_n неограниченно возрастает, с какого-то момента оно станет настолько велико, что расстояния от $(a_n - k/2)^2$ до соседних квадратов станут больше, чем $|k - k^2/4|$. Если $k - k^2/4 \neq 0$, с этого момента в последовательности не будет ни одного точного квадрата. Если же $k - k^2/4 = 0$, то $k = 4$, и все a_n, начиная со второго, будут точными квадратами.

Ответ. 4

Задача 6. Для последовательности целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ и любого натурального числа $k \leqslant 8$ верно неравенство $a_k + a_{k+2} < 2a_{k+1}$. Найдите наибольшее значение выражения

$$a_1 - a_4 - a_7 + a_{10}$$

Решение. Перепишем неравенство $a_k + a_{k+2} < 2a_{k+1}$ в другом виде: $a_{k+2} - a_{k+1} < a_{k+1} - a_k$. Если d_k — разность a_{k+1} и a_k, то неравенство значит, что $d_k > d_{k+1}$. То есть последовательность разностей между двумя соседними членами последовательности — строго убывающая последовательность целых чисел. Пусть $a_4 = a_1 + d_1 + d_2 + d_3, a_7 = a_{10} - d_9 - d_8 - d_7$. Тогда

$$\begin{gathered} a_1 - a_4 - a_7 + a_{10} = -d_1 - d_2 - d_3 + d_7 + d_8 + d_9 = \\ = (d_7 - d_1) + (d_8 - d_2) + (d_9 - d_3) \end{gathered}$$

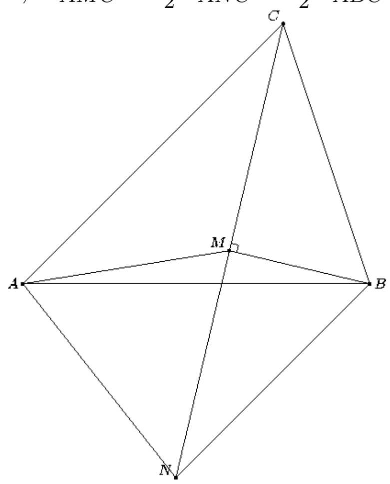
Наибольшее возможное значение для $d_7 - d_1$ — когда $d_1, d_2, \ldots, d_9$ представляют собой последовательные целые числа. Тогда $d_7 - d_1 \leqslant -6$. Например, подходят числа $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9$. Здесь разность между седьмым и первым членами равна -6. Аналогично $d_8 - d_2 \leqslant -6$ и $d_9 - d_3 \leqslant -6$. Следовательно, $(d_7 - d_1) + (d_8 - d_2) + (d_9 - d_3) \leqslant -18$

Покажем, что максимум -18 достигается, приведя пример: Последовательность: 45,44,42,39,35,30,2
Разности: $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9$.
Ответ. -18

Задача 7. С помощью знаков арифметических действий, скобок, а также используя каждую из цифр $1, 5, 6, 7$ ровно по одному разу, составьте выражение, значение которого равно 35.
Решение. Если можно что-то еще, то $\sqrt{(6-1)5} \cdot 7$ или $[176/5]$.
Ответ. $5/(1-6/7)$ или $7/(6/5-1)$.

Задача 8. В вершинах правильной шестиугольной призмы расставлены натуральные числа от 1 до 12, каждое использовано по одному разу. Назовём грань призмы *богатой*, если сумма чисел в её вершинах не меньше 40. Найдите наибольшее возможное количество богатых граней и приведите пример расстановки чисел
Решение. Сумма чисел от 1 до 12 равна 78 . Поэтому любые две богатые грани должны иметь общее ребро: иначе сумма чисел уже на них будет больше 78 . Значит, среди богатых граней не больше двух боковых и не больше одного основания. Пример, когда богатых граней ровно три: 10,12,9,6,5,4 на верхнем основании и 7,11,8,1,2,3 соответственно на нижнем основании.
Ответ. 3, 10,12,9,6,5,4 на верхнем основании и 7,11,8,1,2,3 соответственно на нижнем основании.

Задача 9. Дан треугольник ABC площади 1. Из вершины B опущен перпендикуляр BM на биссектрису угла C. Найдите площадь треугольника AMC.
Решение. Проведем через точку B прямую, параллельную AC до пересечения с биссектрисой угла C в точке N. Так как $\angle BNC = \angle ACN = \angle BCN$, то треугольник BCN - равнобедренный и BM его медиана. Следовательно, $S_{AMC} = \frac{1}{2}S_{ANC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}$.



Ответ. $\frac{1}{2}$

Задача 10. В кафе, где подавали пироги, разрезанные на 12 равных кусков, пришла группа мальчиков и девочек. Каждый мальчик мог съесть шесть или семь кусков пирога, а каждая девочка — два или три куска. Оказалось, что четырёх пирогов им не хватает, а пять пирогов — слишком много. Сколько мальчиков и сколько девочек пришло в кафе?
Решение. Из условия следует, что даже если бы каждый съел минимально возможное число кусков пирога (то есть мальчики по шесть, а девочки - по два), то они съели бы более 48 кусков. А так как 6 и 2 - чётные числа, то в таком случае все дети съели бы суммарно не менее 50 кусков. Если каждый ребёнок съест на один кусок больше, то все вместе они не съедят пяти пирогов, то есть съедено будет не более 59 кусков. Следовательно, всего детей не больше девяти. Если бы мальчиков было семь, то они могли бы съесть $6 \cdot 7 = 42$ куска, а девочки - не более $2 \cdot 2 = 4$ кусков. Но тогда им хватило бы четырёх пирогов, что противоречит условию. Если бы мальчиков было меньше семи, то дети могли бы съесть ещё меньше (поскольку мальчики едят больше девочек).
Девяти мальчиков тоже быть не могло, иначе они могли бы съесть $7 \cdot 9 = 63$ куска и пяти пирогов им не хватило бы. Следовательно, мальчиков могло быть только восемь. Тогда с ними была одна девочка, иначе мальчикам хватило бы четырёх пирогов.

Ответ. 8 мальчиков и 1 девочка

Задача 11. На доске написано число 1. Разрешается заменять написанное на доске число x на числа $3x+1$, $5x+2$ или $x-7$. Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое никогда не появится на доске.
Решение. Нарисовав граф операций $x \to 3x+1$ и $x \to 5x+2$ по модулю 7 , обнаруживаем, что любой из остатков, не равных 3 , может перейти в любой другой, но не может перейти в остаток 3 . Кроме того, если получено число x с данным остатком от деления на 7 , то повторением операции $x \to x-7$ мы можем получить все меньшие числа с тем же остатком. Так как, повторяя операции $x \to 3x+1$ и $x \to 5x+2$, мы можем получать сколь угодно большие числа, из сказанного следует, что можно получить те и только те числа, которые при делении на 7 дают остаток, не равный 3 . Отсюда и получаем ответ.
Ответ. 1004

Задача 12. Вещественное число x назовём *любопытным*, если, стерев одну из цифр в его десятичной записи, можно получить число $2x$. Найдите наибольшее любопытное число.
Решение. Понятно, что искомое число x должно быть меньше 1 , и если его первая цифра после запятой не равна 0 , то стирать надо её. Пусть эта первая цифра равна y, а $x-0,y=z$. Тогда после стирания цифры y получится число $10z$, откуда $10z = 2(y/10+z)$ или $40z = y$. Так как $z < 0{,}1$ имеем $y \leqslant 3$. Подставляя $y = 3$, находим $z = 0{,}075$, откуда и следует ответ.
Ответ. 0,375

Задача 13. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C на катете AC выбрана точка M так, что $AM = BC$, а на катете BC — точка N так, что $BN = MC$. Найдите угол между прямыми AN и BM.
Решение. На перпендикуляре к AC в точке M снаружи $\triangle ABC$ отложим отрезок $MK = MC$. Также построим точку L, для которой $MCLK$ - квадрат. Тогда $\triangle AMK = \triangle MCB == \triangle KNL$. Поэтому $AK = KN$ и $\angle AKN = \angle AKM + \angle MKN = \angle AKM + KNL = AKM + +\angle KAM = 90^\circ$. Тогда $ANK = 45^\circ$, а это и есть искомый угол между прямыми, поскольку $BM \| KN$.
Ответ. 45°

Задача 14. В чайную зашли 16 незнакомцев. Чаепитие проходит так: двое садятся вместе за стол и, пока пьют чай, знакомятся друг с другом. Если двое уже познакомились, то вместе они больше не пьют чай. Какое наименьшее количество чаепитий должно пройти, чтобы в каждой тройке нашлись двое знакомых друг с другом?
Решение. Пусть среди любых трёх человек найдутся двое знакомых между собой. Выберем «незнакомца» A, который провел наименьшее количество чаепитий — k. Следовательно, каждый из k человек, уже познакомившихся с A, провел не менее k чаепитий. Тогда, каждый из $(15-k)$ людей, не знакомых с A, попили чаю и познакомились со всеми $(14-k)$ людей. В противном случае, нашлась бы тройка, не знакомых между собой. Удвоенное число всех чаепитий не меньше чем: $k^2 + k + (15-k)(14-k) = 2k^2 - 28k + 210 = 2(k-7)^2 + 112$. Таким образом, наименьшее число чаепитий N определяется из равенства: $N \geqslant (k-7)^2 + 56 \geqslant 56$. Такое значение достигается, например при двух группах по 8 человек, в каждой из которых все познакомились друг с другом, но никто ни с кем не знаком из другой группы.
Ответ. 56

Задача 15. Для действительных чисел x, y, z и t выполняются равенства:

$$\{x+y+z\} = \{y+z+t\} = \{z+t+x\} = \{t+x+y\} = \frac{1}{4}$$

Найдите все возможные значения выражения $\{x+y+z+t\}$, приведите примеры.
Решение. Из условия задачи следует, что $\begin{matrix} x+y+z = [x+y+z] + \frac{1}{4}, y+z+t = [y+z+t] + \frac{1}{4} \\ z+t+x = [z+t+x] + \frac{1}{4}, t+x+y = [t+x+y] + \frac{1}{4} \end{matrix}$
Итак, $3(x+y+z+t) = [x+y+z] + [y+z+t] + [z+t+x] + [t+x+y] + 1$. Это означает, что $3(x+y+z+t)$ — целое число, тогда дробная часть числа $(x+y+z+t)$ равна 0, $\dfrac{1}{3}$ или $\dfrac{2}{3}$. Все эти

значения достигаются. Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим случаи $x=y=z=t=\frac{3}{4}$, $x=y=z=t=\frac{1}{12}$, $x=y=z=t=\frac{5}{12}$.

Ответ. 0 при $x=y=z=t=\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ при $x=y=z=t=\frac{1}{12}$, $\frac{2}{3}$ при $x=y=z=t=\frac{5}{12}$

Задача 16. На доске написано число 1. Каждую минуту имеющееся на доске выражение либо умножается на переменную x, либо складывается с переменной x. Через 2025 минут на доске появился многочлен $f(x)$ степени 1000, график которого проходит через точку A с абсциссой 1. Какие значения может принимать ордината этой точки?

Решение. После первой операции получается один из многочленов 1-й степени: x или $x+1$. Далее каждое применение 1-й операции увеличивает степень многочлена на 1 и не меняет его значение в точке 1. А каждое применение 2-й операции, наоборот, увеличивает на 1 его значение в точке 1 и не меняет его степень. Так как после применения 2024 операций степень многочлена из первой превратилась в тысячную, значит операция первого типа применялась 999 раз. Тогда операция 2 -го типа применялась $2024-999=1025$ раз, и ровно на столько же увеличилось значение многочлена в точке $x=1$. Но после 1-й операции оно было равно либо 0, либо 1.

Ответ. 1025 или 1026

Задача 17. На доске написаны три натуральных числа: 9, 13 и 25. Петя записывает на бумажке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее, до тех пор пока одно из чисел на доске не станет нулём. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

Решение. На каждом шаге Петя уменьшает произведение чисел на доске на число, которое он пишет на бумажке: $xy(z-1)=xyz-xy$, поэтому произведение чисел на доске сложенное с суммой чисел на бумажке не изменяется. Поскольку в конце произведение на доске будет равно 0 , сумма на бумажке равна исходному произведению xyz.

Геометрическое решение. Рассмотрим параллелепипед со сторонами x, y, z. На каждом шаге мы отрезаем от него параллелепипед толщины 1 , записывая его объём на бумажку. Процесс закончится, когда отрежем всё, и сумма чисел на бумажке будет равна объёму исходного параллелепипеда.

Ответ. 2925

Задача 18. Решить в целых числах уравнение $x^3+y^3+6xy=8$.

Решение. Уравнение $x^3+y^3+6xy=8$ эквивалентно $(x+y-2)(x^2+y^2-xy+2x+2y+4)=0$. Первый множитель нулевой при $y=2-x$, что даёт бесконечное семейство решений $(t, 2-t)$ для всех $t\in\mathbb{Z}$.

Второй множитель обращается в ноль только при $x=y=-2$, что даёт дополнительное решение: Рассмотрим это как квадратное уравнение относительно x: $x^2+(2-y)x+(y^2+2y+4)=0$. Дискриминант этого уравнения: $D=(2-y)^2-4(y^2+2y+4)=4-4y+y^2-4y^2-8y-16=$ $=-3y^2-12y-12=-3(y+2)^2$. Дискриминант неотрицателен только при $y=-2$, тогда $D=0$, и уравнение имеет единственное решение.

Ответ. $(-2,\ -2)$ и $(x,\ y)=(t,\ 2-t)$ для $t\in\mathbb{Z}$

Задача 19. Дано натуральное n. Найдите количество последовательностей $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, все члены которых равны $0, 1, 2$ или 3, таких, что $n=a_0+2a_1+2^2a_2+\ldots+2^na_n$.

Решение. Обозначим искомое количество $F(n)$. Заметим, что $F(n)$ есть просто число представлений n в виде суммы степеней 2 , каждая из которых используется не более 3 раз (потому что если i-ая степень не используется, это означает, что $a_i=0$, а степень с показателем, большим n, использоваться не может, так как $2^{n+1}>n$. Если $n=2k+1$ - нечётное число, то a_0 равно 1 или 3 . Заменяя его соответственно на 0 или 2 , мы установим взаимно-однозначное соответствие между разбиениями n и $n-1$. Поэтому $F(2k+1)=F(2k)$.

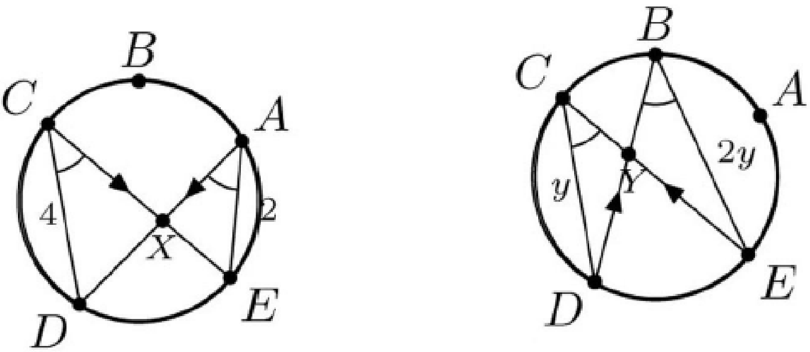
Если $n = 2k$, то a_0 равно 0 или 2 . Удаляя из разбиения n все слагаемые, равные 2^0, мы получим в первом случае все разбиения $2k$, в которых нет единиц, а во втором - все такие разбиения $2k-2$. Деля их на 2 , получаем все разбиения k и $k-1$ соответственно. Таким образом, $F(2k) = F(k) + F(k-1)$.

Теперь можно доказать, что $F(n) = [n/2] + 1$, индукцией по n. База $n = 1$ и $n = 2$ очевидна. Пусть $F(m) = [m/2]+1$ при всех $m < n$. Если $n = 2k$, то $F(n) = F(k)+F(k-1) = [k/2]+1+[(k-1)/2]+1 = k-1+2 = k+1 = [2k/2]+1$. Если $n = 2k+1$, то $F(n) = F(2k) = k+1 = [n/2]+1$. Утверждение доказано.

Ответ. $[n/2] + 1$

Задача 20. Города A, B, C, D, E лежат на одной окружности и попарно соединены прямолинейными дорогами. Два велосипедиста выехали одновременно из A в D и из C в E, повстречавшись в пути. Затем они выехали одновременно из D в B и из E в C, опять повстречавшись в пути. Наконец, они выехали одновременно из B в E и из C в B, прибыв в пункты назначения одновременно. Найдите BC, если $AE = 2$ км и $CD = 4$ км, а скорость каждого велосипедиста постоянна.

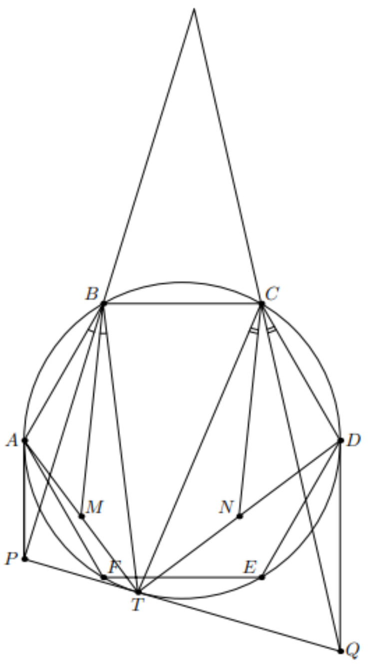
Решение. Пусть при первом заезде велосипедисты встретились в точке X. Так как отрезки AD и CE есть хорды одной окружности, то треугольники AXE и CXD подобны. Следовательно, отношение скоростей велосипедистов равно $\dfrac{AX}{CX} = \dfrac{AE}{CD} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Если скорость первого велосипедиста, выехавшего из пункта A, равна V, то скорость второго, выехавшего из C, равна $2V$. Пусть при втором заезде велосипедисты встретились в точке Y. Так как треугольники BYE и CYD подобны, то $\dfrac{CD}{BE} = \dfrac{CY}{BY} = \dfrac{V}{2V} = \dfrac{1}{2}$. Поэтому $BE = 2CD = 8$. Наконец, при третьем заезде $\dfrac{BC}{2V} = \dfrac{BE}{V}$, откуда получаем $BC = 2BE = 16$ км.



Ответ. 16 км

(a) Первый заезд

(b) Второй заезд



Задача 21. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Точки P и Q выбраны на касательных, проведенных к этой окружности в точках A и D соответственно, так, что PQ касается меньшей дуги EF этой окружности. Найдите угол между прямыми PB и QC.

Решение. Пусть T - точка касания PQ с окружностью, M, N - середины отрезков AT, DT. Так как PB и CQ - симедианы треугольников ABT, CDT соответственно, то $\angle ABP = \angle MBT, \angle DCQ = \angle NCT$. Поскольку MN - средняя линия треугольника ADT, то $MN = AD/2 = BC$ и $MN \| BC$ (рис.19). Значит, угол между PB и QC равен $\angle PBM + \angle NCQ = \angle ABM + \angle NCD - \angle MBT - \angle TCN = 30°$.

Ответ. $30°$