Математическая игра «Спектр». 10-11 классы

Задача 1. Число называется палиндромом, если оно не изменяется при перестановке цифр в обратном порядке. Найдите самое большое 6-значное число N такое, что числа N и $3N$ одновременно являются числами-палиндромами.

Задача 2. Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1 и меньше этого числа. Наименьший собственный делитель натурального числа равен a. Наибольший собственный делитель этого числа равен $a^6 + 6$. Чему может быть равно это число?

Задача 3. Графиком функции $y = f(x)$ является прямая. Найдите эту функцию, если известно, что для всех x выполняется равенство: $f(f(x + 20)) + 25 = 20f(x + 2) + 5$.

Задача 4. Сколькими способами можно разменять сумму в 105 рублей монетами 1, 2 и 5 рублей? Способы считаются различными, если в них разное количество хотя бы одного вида монет. В размене не обязательно должны участвовать все три вида монет одновременно.

Задача 5. Для натурального k определим последовательность $a_1, a_2, \ldots$ условиями $a_1 = k+1$ и $a_{n+1} = a_1a_2\ldots a_n + k$ при всех натуральных n. При каких k в этой последовательности бесконечно много точных квадратов?

Задача 6. Для последовательности целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ и любого натурального числа $k \leqslant 8$ верно неравенство $a_k + a_{k+2} < 2a_{k+1}$. Найдите наибольшее значение выражения

$$a_1 - a_4 - a_7 + a_{10}$$

Задача 7. С помощью знаков арифметических действий, скобок, а также используя каждую из цифр $1, 5, 6, 7$ ровно по одному разу, составьте выражение, значение которого равно 35.

Задача 8. В вершинах правильной шестиугольной призмы расставлены натуральные числа от 1 до 12, каждое использовано по одному разу. Назовём грань призмы *богатой*, если сумма чисел в её вершинах не меньше 40. Найдите наибольшее возможное количество богатых граней и приведите пример расстановки чисел

Задача 9. Дан треугольник ABC площади 1. Из вершины B опущен перпендикуляр BM на биссектрису угла C. Найдите площадь треугольника AMC.

Задача 10. В кафе, где подавали пироги, разрезанные на 12 равных кусков, пришла группа мальчиков и девочек. Каждый мальчик мог съесть шесть или семь кусков пирога, а каждая девочка — два или три куска. Оказалось, что четырёх пирогов им не хватает, а пять пирогов — слишком много. Сколько мальчиков и сколько девочек пришло в кафе?

Задача 11. На доске написано число 1. Разрешается заменять написанное на доске число x на числа $3x + 1$, $5x + 2$ или $x - 7$. Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое никогда не появится на доске.

Задача 12. Вещественное число x назовём *любопытным*, если, стерев одну из цифр в его десятичной записи, можно получить число $2x$. Найдите наибольшее любопытное число.

Задача 13. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C на катете AC выбрана точка M так, что $AM = BC$, а на катете BC — точка N так, что $BN = MC$. Найдите угол между прямыми AN и BM.

Задача 14. В чайную зашли 16 незнакомцев. Чаепитие проходит так: двое садятся вместе за стол и, пока пьют чай, знакомятся друг с другом. Если двое уже познакомились, то вместе они больше не пьют чай. Какое наименьшее количество чаепитий должно пройти, чтобы в каждой тройке нашлись двое знакомых друг с другом?

Задача 15. Для действительных чисел x, y, z и t выполняются равенства:

$$\{x+y+z\} = \{y+z+t\} = \{z+t+x\} = \{t+x+y\} = \frac{1}{4}$$

Найдите все возможные значения выражения $\{x+y+z+t\}$, приведите примеры.

Задача 16. На доске написано число 1. Каждую минуту имеющееся на доске выражение либо умножается на переменную x, либо складывается с переменной x. Через 2025 минут на доске появился многочлен $f(x)$ степени 1000, график которого проходит через точку A с абсциссой 1. Какие значения может принимать ордината этой точки?

Задача 17. На доске написаны три натуральных числа: 9, 13 и 25. Петя записывает на бумажке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее, до тех пор пока одно из чисел на доске не станет нулём. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

Задача 18. Решить в целых числах уравнение $x^3 + y^3 + 6xy = 8$.

Задача 19. Дано натуральное n. Найдите количество последовательностей $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, все члены которых равны $0, 1, 2$ или 3, таких, что $n = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \ldots + 2^na_n$.

Задача 20. Города A, B, C, D, E лежат на одной окружности и попарно соединены прямолинейными дорогами. Два велосипедиста выехали одновременно из A в D и из C в E, повстречавшись в пути. Затем они выехали одновременно из D в B и из E в C, опять повстречавшись в пути. Наконец, они выехали одновременно из B в E и из C в B, прибыв в пункты назначения одновременно. Найдите BC, если $AE = 2\,\text{км}$ и $CD = 4\,\text{км}$, а скорость каждого велосипедиста постоянна.

Задача 21. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Точки P и Q выбраны на касательных, проведенных к этой окружности в точках A и D соответственно, так, что PQ касается меньшей дуги EF этой окружности. Найдите угол между прямыми PB и QC.