# Математическая игра «Спектр». 7–8 классы. Решения и ответы

**Задача 1.** Имеется тридцать три натуральных числа, среди которых гарантированно есть числа 3, 4 и 5. Про эти числа известно, что если вычислить среднее арифметическое любых 27 чисел, то получится значение меньше 2. Какое наименьшее количество единиц может быть среди них?

**Решение.** *Пример.* По условию среднее арифметическое любых 27 чисел меньше 2, значит, сумма любых 27 чисел меньше $27 \cdot 2 = 54$. Возьмем в набор 13 единиц, 17 двоек, тройку, четверку и пятерку. Посмотрим на сумму наибольших 27 чисел из этого набора, то есть на сумму

$$5+4+3+\underbrace{2+\ldots+2}_{17\text{ двоек}}+\underbrace{1+\ldots+1}_{7\text{ единиц}}=12+34+7=53<54$$

Таким образом, сумма 27 наибольших чисел этого набора меньше 54, а значит и сумма любых других 27 чисел из этого набора меньше 54. Следовательно, набор из 13 единиц, 17 двоек, тройки, четверки и пятерки подходит.

*Оценка.* Пусть такой набор существует. Тогда в нем не более 12 единиц.

Разобьем числа нашего набора на три группы: первая группа будет содержать все единицы и только их, во второй группе будут числа 3,4 и 5, в третьей - все остальные числа. Тогда в первой группе не более 12 чисел, во второй - ровно три числа, в третьей - хотя бы $33-12-3=18$ чисел. Заметим, что все единицы находятся в первой группе, значит, каждое число третьей группы не меньше 2 . Тогда рассмотрим сумму $S$ любых 18 чисел из третьей группы, всех чисел второй группы и шести единиц из первой группы. Получим следующее:

$$S \geqslant 18\cdot 2+3+4+5+6\cdot 1=36+12+6=54$$

Значит, мы нашли набор из 27 чисел, сумма которых не меньше 54, следовательно, среднее арифметическое этих чисел не меньше 2. Значит, набор не может содержать менее 13 единиц.

**Ответ.** 13

**Задача 2.** Андрей пишет натуральные числа, начиная с единицы, без пробелов и запятых (1234567891011...). В какой-то момент он впервые выписал такую восьмерку цифр: 75318642. Какие 8 цифр будут выписаны следующими?

**Решение.** Ход рассуждений может быть таким. Может ли эта восьмерка цифр целиком относиться к одному числу? Да, но тогда оно не менее чем восьмизначное и начинается с 7. Может ли в этой восьмерке быть граница между соседними числами? Да, причем тогда это должны быть числа внутри одного десятка, потому что среди цифр нет 9. Но для чисел одного десятка цифры в разряде десятков совпадают, а тут все цифры различны. Следовательно, разряд десятков тут всего один, - в этих восьми цифрах есть окончание не более чем одного числа и начало следующего. Так как все цифры разные, то эти числа не менее чем восьмизначные. Самое маленькое восьмизначное число, которое здесь могло бы встретиться, начинается с 18642. Предыдущее число заканчивается на 753, значит, дальше идут 754 и снова всё начало числа.

**Ответ.** 75418642

**Задача 3.** Найдите наибольшее четырехзначное число, цифры в котором идут в порядке возрастания, а если умножить его на 4, то цифры в произведении будут идти в порядке убывания?

**Решение.** Пример: 9876/4=2469. Оценка: если после умножения на 4 число получается четырёхзначным, то возможный максимум этого числа — 9876. Если же результат пятизначный, то он начинается на 1, 2 или 3, а тогда цифры не могут идти по убыванию.

**Ответ.** 2469

**Задача 4.** Графиком функции $y=f(x)$ является прямая, не параллельная оси $OX$. Найдите эту функцию, если известно, что для всех $x$ выполняется равенство

$$f(2025+f(x))=2025+2f(x)$$

**Решение.** Пусть $f(x) = kx + b$. Тогда равенство из условия задачи примет вид: $k(2025 - kx - b) + b = 2025 - 2(kx + b)$. Преобразовав его, получим: $(2k - k^2)\,x + k(2025 - b) + 3b - 2025 = 0$. Это равенство должно выполняться для всех значений $x$, следовательно, $2k = k^2$ и $k(2025 - b) + 3b = 2025$. По условию $k \neq 0$, поэтому из первого равенства получим, что $k = 2$. Подставив это значение во второе равенство, найдём, что $b = -2025$.
**Ответ.** $f(x) = 2x - 2025$

**Задача 5.** Сколькими способами можно разменять сумму в 100 рублей монетами 1, 2 и 5 рублей? Способы считаются различными, если в них разное количество хотя бы одного вида монет. В размене не обязательно должны участвовать все три вида монет одновременно
**Решение.** Заметим, что способ размена однозначно определяется двумя числами: количеством двоек и количеством пятёрок. Возможное количество двоек - от 0 до 50 - всего 51 вариант. Аналогично, возможное количество пятёрок от 0 до 20 - всего 21 вариант. Если мы возьмём произвольное количество двоек и пятёрок из этого диапазона, то можем получить число, превосходящее 100 (но всегда не превосходящее 200). Но при этом, есть взаимооднозначное соответствие между парам двоек и пятёрок, образующими число, больше 100 и парами, образующими число, меньше 100. В самом деле, пусть взята пара ( $d, p$ ), где первое число - количество двоек, а второе количество пятёрок. Поставим ей в соответствие пару ( $50 - d, 20 - p$ ). Тогда, если первой паре соответствует число большее 100 , то второй - число меньшее 100 , и наоборот. Именно, первой паре соответствует число $2d + 5p$, а второй $-2(50 - d) + 5(20 - 5)$. Эти числа расположены симметрично относительно числа 100 , то есть их полусумма равна 100: $(2d + 5p + 2(50 - d) + 5(20 - 5))/2 = 100$. Количество всевозможных пар: $21 \cdot 51 = 1071$. Среди них есть 11 пар, соответствующих числу 100. Значит, количество пар, соответствующих числам меньше 100 , равно $(1071 - 11)/2 = 530$. В итоге, получаем ответ: $530 + 11 = 541$.
**Ответ.** 541

**Задача 6.** Как-то раз собрались 10 человек, каждый из которых рыцарь или лжец. Часть из них, обращаясь ко всем остальным, произнесли фразу: «Среди вас 3 или 4 лжеца». Все остальные сказали: «Среди вас 5 или 6 рыцарей». Сколько рыцарей могло быть среди них?
**Решение.** Если рыцари есть и их 5 или меньше, а также если их 8 или больше, то они не могут произнести ни одну из этих фраз. Если рыцарей 6, то 4 лжеца не могут произнести ни одну из этих фраз.
Если рыцарей 7, а лжецов 3, то каждый может произнести обе эти фразы, так что все работает.Если рыцарей ноль, то лжецы врут обеими фразами.
**Ответ.** 0, 7

**Задача 7.** Найдите все пары натуральных чисел $x$, $y$, для которых $x + 3^y$ и $y + 3^x$ — это два последовательных натуральных числа.
**Решение.** Пусть $x + 3^y = y + 3^x + 1$. Тогда $3^y - y = 3^x - x + 1$. Докажем, что при увеличении числа $n$ на 1 разность $3^n - n$ увеличивается хотя бы на 2 , то есть что $3^{n+1} - (n+1) \geqslant 3^n - n + 2$. Последнее неравенство эквивалентно тому, что $3^{n+1} - 3^n \geqslant 3$, то есть $2 \cdot 3^n \geqslant 3$, что очевидно. Поэтому, если $y = x + n, 3^y - y$ больше $3^x - x$ хотя бы на $2n$, и последовательными числа $3^y - y$ и $3^x - x$ быть не могут.
**Ответ.** таких пар нет

**Задача 8.** Зарплата Ани составляет 5/8 от зарплаты Кати, а расходует Аня в два раза меньше, чем Катя. После всех расходов у Ани остаётся 40 % её заработка. А сколько процентов заработка остаётся после расходов у Кати?
**Решение.** Если Аня зарабатывает $5x$, то тратит она $3x$ и остаётся у неё $2x$. Аня зарабатывает $8x$, тратит $6x$ и остаются у неё те же самые $2x$ – но для неё это всего 25%.
**Ответ.** 25

**Задача 9.** Имеется 9 карточек, на которых написаны числа 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Ане, Боре и Васе раздали по три карточки. Каждый посмотрел на свои карточки, после чего

Аня сказала, что наибольшее из её трёх чисел – 11. Тогда Боря сказал, что знает, какие числа у каждого. Какие числа у Васи?
**Решение.** У Бори не может быть чисел, больших 11: в противном случае из чисел, не больших 11, у него отсутствуют хотя бы 4, и их можно по-разному распределить между Аней и Васей. Значит, у Ани и Бори находятся все числа, не большие 11, а у Васи — все остальные.
**Ответ.** 12, 13, 14

**Задача 10.** По кругу стоят 268 чисел. Семнадцатое число равно 3, восемьдесят третье равно 5, а 144-е равно 9. Сумма любых 20 чисел, стоящих подряд, равна 80. Найдите 210-е число.
**Решение.** Начнём с какого-нибудь места в круге и будем отсчитывать по 20 чисел. Когда мы сделаем это 67 раз, мы пройдём 5 полных кругов. Значит, сумма всех чисел в круге равна $80 \cdot 67/5 = 1072$. А если сделать это 27 раз, мы пройдём 2 полных круга и ещё 4 числа. Сумма этих четырёх чисел (начинающихся с выбранного нами места, то есть каких угодно) равна $27 \cdot 80 - 2 \cdot 1072 = 16$. Поскольку сумма любых четырёх последовательных чисел одинакова, последовательность чисел имеет период четыре. Значит, семнадцатое число равно первому, восемьдесят третье - третьему, сто сорок четвёртое - четвёртому, а двести десятое - второму $16 - 3 - 5 - 9 = -1$.
**Ответ.** $-1$

**Задача 11.** На доске были написаны 2025 чисел (не обязательно различных). Однажды утром каждое из них заменили на сумму всех остальных, и оказалось, что на доске написаны те же самые числа, что и раньше. Чему может быть равно произведение этих чисел?
**Решение.** Пусть исходные числа суть $x_1, \ldots, x_{2025}$, а их сумма $S$. Так как каждое $x_i$ заменилось на $S - x_i$, сумма всех чисел стала равна $2025S - S = 2024S$. Поскольку $2024S = S$, сумма $S$ равна 0 . Значит, каждое число заменилось на противоположное, и произведение сменило знак. Но оно не изменилось, значит, оно 0.
**Ответ.** 0

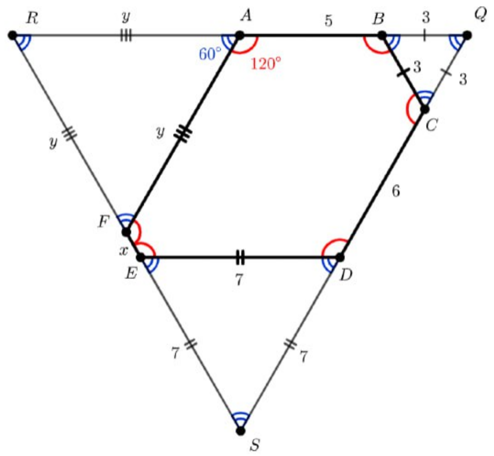
**Задача 12.** С помощью знаков арифметических действий, скобок, а также используя каждую из цифр $1, 5, 6, 7$ ровно по одному разу, составьте выражение, значение которого равно 35.
**Решение.** Если можно что-то еще, то $\sqrt{(6-1)5} \cdot 7$ или $[176/5]$.
**Ответ.** $5/(1 - 6/7)$ или $7/(6/5 - 1)$.

**Задача 13.** В комнате 8 девочек. Каждая вручила булочку каждому знакомому мальчику. Каждый мальчик вручил по две булочки каждой незнакомой девочке. Каково максимально возможное количество мальчиков, если знакомства взаимные, а всего было роздано 100 булочек?
**Решение.** Пусть мальчиков $m$. Тогда всего $8m$ пар «мальчик - девочка». Пусть мальчики раздали $b_m$, а девочки - $b_d$ булочек. Тогда из условия $b_m = 2 \cdot (8m - b_d)$. Учитывая, что $b_m + b_d = 100$, соотношение преобразуется к виду: $16m = 100 + b_d$. Поскольку $b_d \leqslant 100$, то $m \leqslant [200/16] = 12$. Пример с 12 мальчиками можно построить, например, так: только один мальчик не знаком с четырьмя девочками, а остальные мальчики знакомы со всеми восьмью девочками. Тогда $b_m = 8, b_d = 12 \cdot 8 - 4 = 92$. Ответ: 12 .
**Ответ.** 12

**Задача 14.** На доске написано:
*В этом предложении ... % цифр делятся на 2, ... % цифр делятся на 3, а ... % цифр делятся и на 2, и на 3.*
Вставьте вместо многоточий целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным. Найдите все ответы.
**Решение.** Объясним, как можно было такой ответ искать. Всего в обсуждаемом предложении не более $3 \cdot 2 + 4 = 10$ цифр. Поэтому каждое пропущенное число двузначно. То есть всего цифр в предложении ровно десять, а значит, все пропущенные числа заканчиваются на 0. Следовательно, в предложении содержатся три нуля. Каждый из этих трёх нулей делится и на 2, и на 3, поэтому все пропущенные числа не меньше 30. Учитывая, что в предложении уже

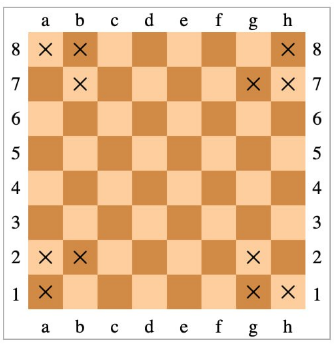
имеются две двойки и две тройки, получаем, что первые два числа лежат между 50 и 80, а третье — между 30 и 60. Дальше уже не так сложно найти ответ перебором.
**Ответ.** «В этом предложении 70% цифр делятся на 2,60% цифр делятся на 3 , а 40 % цифр делятся и на 2 , и на 3 ». «В этом предложении 80% цифр делятся на 2 , 60% цифр делятся на 3 , а 40% цифр делятся и на 2 , и на 3 ».

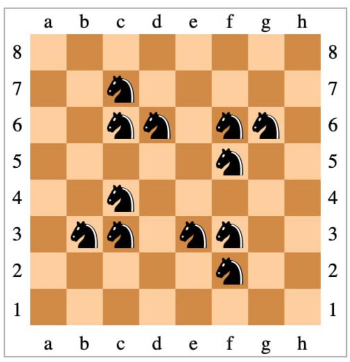
**Задача 15.** Дан выпуклый шестиугольник, у которого все углы равны. Его стороны равны 5,3,6,7,$x$,$y$ (в таком порядке). Найдите $y$ и $x$.
**Решение.** Пусть шестиугольник $ABCDEF$ имеет стороны 5,3,6,7,$x$,$y$ соответственно. Т. к. по условию все углы шестиугольника равны, то $\angle A = \angle B = ... = \angle F = \dfrac{180^\circ(n-2)}{n} = \dfrac{180^\circ \cdot 4}{6} = 120^\circ$.
Продлим стороны $AB$,$CD$ и $EF$ до пересечения в точках $R$,$Q$,$S$ (как на рис.). Углы, смежные с углами шестиугольника, равны $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, поэтому треугольники $RAF$,$QCB$ и $SED$ являются правильными (т.к. имеют два угла в $60^\circ$). Тогда $RA = RF = AF = y$, $QB = QC = BC = 3$ и $SD = SE = DE = 7$.
Также, треугольник $RQS$ является правильным (т.к. все его углы равны $60^\circ$), поэтому $RQ = QS = SR$.
$RA + AB + BQ = QC + CD + DS = SE + EF + FR$.
$y + 5 + 3 = 3 + 6 + 7 = 7 + x + y$.
$y + 8 = 16 = 7 + x + y$, откуда $y = 8, x = 1$.




**Ответ.** $y = 8, x = 1$

**Задача 16.** Какое наименьшее число коней может побить все поля шахматной доски?
**Решение.** *Оценка.* Чтобы побить выделенные на рисунке слева 12 клеток необходимо, по крайней мере, 12 коней, так как никакие две клетки не могут быть побиты одним конем.
*Пример.* Расстановка на рисунке справа. **Ответ:** 12.




**Ответ.** 12

**Задача 17.** Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1 и меньше этого числа. Наименьший собственный делитель натурального числа равен $a$. Наибольший собственный делитель этого числа равен $a^2 + 2$. Чему может быть равно это число?

**Решение.** Вспомним, что $a$ — простое. Предположим противное: пусть $a$ — составное. Тогда существует простой делитель $p < a$, который также делит число, что противоречит минимальности $a$.
Рассмотрим простые $a$:
– $a = 2$: $N = 2 \cdot (4 + 2) = 12$. Собственные делители: 2, 3, 4, 6.
– $a = 3$: $N = 3 \cdot (9 + 2) = 33$. Собственные делители: 3, 11.
Для $a > 3$ рассмотрим $a \mod 3$: если $a \equiv 0 \pmod 3$, то $a = 3$, а если $a \not\equiv 0 \pmod 3$, то $a^2 \equiv 1 \pmod 3$, значит $a^2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$, то есть $3 \mid N$, и так как $a > 3$, то получаем противоречие с минимальностью $a$.
**Ответ.** 12, 33

**Задача 18.** На выходе станции метро установлены три одинаковых эскалатора длиной 60 метров: первый — неподвижный, второй движется вверх, третий — вниз с той же скоростью. Одновременно со станции начали подниматься три пассажира: Антонио поднимается по неподвижному эскалатору, Борисио — по движущемуся вверх эскалатору с такой же скоростью, а Praванио по движущемуся вниз эскалатору со скоростью в 3 раза больше. Когда через 10 минут Борисио достиг верха эскалатора, Praванио оставалось до верха в 1,5 раза меньше, чем Антонио. Найдите скорость эскалатора.
**Решение.** Пусть $u$ — собственная скорость Антонио (в м/мин), $v$ — скорость эскалатора (в м/мин). Через 10 минут Борисио достиг верхней точки:

$$\frac{60}{u+v} = 10 \quad \Rightarrow \quad u + v = 6 \quad (1)$$

За это время:
- Антонио прошёл $10u$, ему осталось $60 - 10u$
- Praванио прошёл $10(3u - v)$, ему осталось $60 - 10(3u - v) = 60 - 30u + 10v$
По условию оставшееся у Praванио $= \frac{2}{3}$ оставшегося у Антонио

$$60 - 30u + 10v = \frac{2}{3}(60 - 10u), 60 - 30u + 10v = 40 - \frac{20}{3}u,$$
$$20 - 30u + 10v = -\frac{20}{3}u, 20 + 10v = 30u - \frac{20}{3}u = \frac{70}{3}u,$$
$$60 + 30v = 70u, v = \frac{70u - 60}{30} = \frac{7u - 6}{3} \quad (2)$$

Из (1): $v = 6 - u$. Подставим в (2): $6 - u = \frac{7u-6}{3}, 3(6 - u) = 7u - 6$, $18 - 3u = 7u - 6, 24 = 10u$, $u = 2{,}4, v = 6 - 2{,}4 = 3{,}6$
**Ответ.** 3,6 м/мин.

**Задача 19.** В дурацкой стране 10 городов, некоторые из которых соединены дорогами (каждая дорога соединяет ровно два различных города, каждые два города соединены не более чем одной дорогой). Маршрут по дорогам называется кольцевым, если (и только если) он начинается и заканчивается в одном и том же городе и ни через какой промежуточный город не проходит более одного раза. Длина такого маршрута — это количество дорог в нём. При каком наименьшем количестве дорог в дурацкой стране возможно, что в дурацкой стране существуют кольцевые маршруты длин $3, 4, 5, \ldots, 10$?
**Решение.** *Пример.* Пронумеруем города, соединим 1-2, 2-3, …, 9-10, 10-1, и 2-4, 1-6, 6-9.
*Оценка.* Пусть дорог 12. Тогда есть внешний цикл из 10 дорог и еще какие-то две дополнительные дороги. Посчитаем количество циклов. Внешний цикл 1. Если в цикл входит ровно одна дополнительная дорога, то таких циклов 2+2. Если два дополнительных ребра, то не более двух (если дополнительные дороги имеют один конец, то тогда есть 1 цикл с ними обеими, иначе внешний цикл разбивается концами дополнительных дорог на 4 части, и в цикле будут 2 из них, причем не соседние). Получается всего максимум 7 циклов, а нужно хотя бы 8.
**Ответ.** 13

**Задача 20.** Дан равносторонний треугольник $ABC$. Точка $M$ взята на стороне $AC$, а на продолжении стороны $BC$ за вершину $C$ отмечена точка $N$, такая, что $BM = MN$. Найдите

величину угла $CMN$, если угол $MBC$ равен $40^\circ$.
**Решение.** Из условия следует, что $\triangle BMN$ - равнобедренный, следовательно $\angle MNB = \angle MBC = 40^\circ = \angle MNC$. Рассмотрим треугольник $CMN : \angle MCN = 180^\circ - \angle C$ ($\angle C = 60^\circ$, т.к. $\triangle ABC$ – р/с) $= 120^\circ$. Значит, $\angle CMN = 180^\circ - (120^\circ + 40^\circ) = 20^\circ$.
**Ответ.** $20^\circ$.

**Задача 21.** Яблоко, груша и апельсин стоят дороже 11 копеек, а три яблока, три груши и апельсин стоят дешевле 27 копеек. Все фрукты стоят целое число копеек, фрукты одного вида стоят одинаково. Сколько стоит каждый фрукт, если груша самая дорогая?
**Решение.** Обозначим через Я, Г, А стоимость яблока, груши и апельсина соответственно. Тогда по условию $Я + Г + А \geqslant 12$ и $3Я + 3Г + А \leqslant 26$. Тогда $3Я + 3Г + 3А \geqslant 36$ и $А \geqslant 5$. Так как груша самая дорогая, то $Г \geqslant 6$. Но если $Г \geqslant 7$, то $3Я \leqslant 26 - 3 \cdot 7 - 5 = 0$, чего быть не может, поэтому $Г = 6$, $А = 5$ и $3Я \leqslant 26 - 3 \cdot 6 - 5 = 3$, то есть $Я = 1$.
**Ответ.** Яблоко – 1 копейку, груша – 6 копеек, апельсин – 5 копеек.