Математическая игра «Спектр». 9 классы

Задача 1. Десятичная запись произведения некоторых четырёх последовательных натуральных чисел не заканчивается на 0. Определите вторую с (правого) конца цифру десятичной записи произведения наибольшего и наименьшего из этих чисел.

Задача 2. Натуральное число называется палиндромом, если его десятичная запись читается одинаково слева направо и справа налево (десятичная запись числа не может начинаться с нуля). Существуют ли семизначный и четырёхзначный палиндромы, сумма которых — восьмизначный палиндром? (Если существуют, то приведите пример чисел.)

Задача 3. На острове собрались 666 аборигенов, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Каждый из них обратился ко всем остальным с какой-то из двух фраз: «Среди вас ровно 331 лжец или ровно 332 лжеца», и «Среди вас ровно 333 рыцаря или ровно 334 рыцаря». Сколько рыцарей могло быть среди них?

Задача 4. Для натурального k определим последовательность $a_1, a_2, \ldots$ условиями $a_1 = k+1$ и $a_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_n + k$ при всех натуральных n. При каких k в этой последовательности бесконечно много точных квадратов?

Задача 5. Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ состоят из целых положительных чисел. Какое наибольшее значение может принимать произведение $a_3 b_3$, если $3a_2b_2 + a_6b_6 \leqslant 108$?

Задача 6. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведены медиана CM, биссектриса CL и высота CH, причем медиана в 3 раза больше высоты. Во сколько раз биссектриса больше высоты?

Задача 7. Через точку M, лежащую внутри треугольника ABC, проведены прямые, параллельные его сторонам. Площади образовавшихся при этом треугольников соответственно равны 4, 9 и 16 . Чему равна площадь треугольника ABC?

Задача 8. Между городами ездит поезд с постоянной скоростью, кроме двух участков, на которых он вынужден ехать с меньшей скоростью ввиду их плохого состояния. Если отремонтировать любой из этих участков, то средняя скорость поезда увеличится на треть. Во сколько раз она увеличится, если отремонтировать оба участка?

Задача 9. Графиком функции $y = f(x)$ является прямая. Найдите эту функцию, если известно, что для всех x выполняется равенство: $f(f(x)) + 20 = 2f(x) + 5$.

Задача 10. Точки A, B, C лежат на графике $y = x^2$. Оказалось, что медиана ВМ треугольника ABC параллельна оси ординат и имеет длину 2. Найдите площадь треугольника ABC.

Задача 11. В вершинах правильной шестиугольной призмы расставлены натуральные числа от 1 до 12, каждое использовано по одному разу. Назовём грань призмы богатой, если сумма чисел в её вершинах не меньше 40. Найдите наибольшее возможное количество богатых граней и приведите пример расстановки чисел

Задача 12. Сколькими способами можно разменять сумму в 102 рубля монетами 1, 2 и 5 рублей? Способы считаются различными, если в них разное количество хотя бы одного вида монет. В размене не обязательно должны участвовать все три вида монет одновременно.

Задача 13. На доске записано несколько попарно различных (вещественных) чисел, причём среди любых двадцати (попарно различных) из них найдутся 10 (попарно различных), сумма которых равна 100. Каково наибольшее возможное количество чисел на доске?

Задача 14. Найдите количество пар целых чисел ($x;y$), удовлетворяющих равенству: $x^2+xy+2x=300000$.

Задача 15. Решите в вещественных числах систему

$$x\left(y+z-x^3\right)=y\left(z+x-y^3\right)=z\left(x+y-z^3\right)=1$$

Задача 16. Каждая клетка квадратной таблицы 100×100 окрашена в один из k цветов. Оказалось, что для любых трёх клеток одного цвета, находящихся в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток этого же цвета. При каком наименьшем k это возможно?

Задача 17. Какие натуральные числа можно представить в виде суммы нескольких (не обязательно всех) своих различных делителей, образующих арифметическую прогрессию?

Задача 18. На выходе станции метро установлены три одинаковых эскалатора длиной 60 метров: первый — неподвижный, второй движется вверх, третий — вниз с той же скоростью. Одновременно со станции начали подниматься три пассажира: Антонио поднимается по неподвижному эскалатору, Борисио — по движущемуся вверх эскалатору с такой же скоростью, а Вованио по движущемуся вниз эскалатору со скоростью в 3 раза больше. Когда через 10 минут Борисио достиг верха эскалатора, Вованио оставалось до верха в 1,5 раза меньше, чем Антонио. Найдите скорость эскалатора.

Задача 19. С помощью знаков арифметических действий, скобок, а также используя каждую из цифр $1,5,6,7$ ровно по одному разу, составьте выражение, значение которого равно 35.

Задача 20. Клетки квадрата 9×9 покрашены в шахматном порядке так, что чёрных клеток больше, чем белых. Изначально разрешается поместить фишку в любую чёрную клетку. Затем каждым ходом можно передвинуть фишку на чёрную клетку, соседнюю с текущей по вершине. Какое наименьшее количество ходов нужно сделать, чтобы обойти все чёрные клетки доски (возвращаться в исходную клетку не обязательно)?

Задача 21. Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1 и меньше этого числа. Наименьший собственный делитель натурального числа равен a. Наибольший собственный делитель этого числа равен $2a^2+1$. Чему может быть равно это число?