Математическая игра «Спектр». 9 классы.
Решения и ответы

Задача 1. Десятичная запись произведения некоторых четырёх последовательных натуральных чисел не заканчивается на 0. Определите вторую с (правого) конца цифру десятичной записи произведения наибольшего и наименьшего из этих чисел.
Решение. Можно перебрать возможные остатки меньшего числа от деления на 100.
Ответ. 5 или 0

Задача 2. Натуральное число называется палиндромом, если его десятичная запись читается одинаково слева направо и справа налево (десятичная запись числа не может начинаться с нуля). Существуют ли семизначный и четырёхзначный палиндромы, сумма которых — восьмизначный палиндром? (Если существуют, то приведите пример чисел.)
Решение. Этот пример - единственный. В самом деле, восьмизначная сумма семизначного и четырёхзначного чисел должна начинаться с 1000 и, значит, должна равняться 10000001. Поэтому семизначный палиндром должен начинаться с 999 и имеет вид $999x999$, а четырёхзначный должен оканчиваться и начинаться на 2 , откуда $x = 7$.
Ответ. Да, существуют: 9997999 и 2002.

Задача 3. На острове собрались 666 аборигенов, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Каждый из них обратился ко всем остальным с какой-то из двух фраз: «Среди вас ровно 331 лжец или ровно 332 лжеца», и «Среди вас ровно 333 рыцаря или ровно 334 рыцаря». Сколько рыцарей могло быть среди них?
Решение. Если рыцари есть и их 333 или меньше, а также если их 336 или больше, то они не могут произнести ни одну из этих фраз. Если рыцарей 334, то 332 лжеца не могут произнести ни одну из этих фраз.
Если рыцарей 335, а лжецов 331, то каждый может произнести обе эти фразы, так что все работает. Если рыцарей ноль, то лжецы врут обеими фразами.
Ответ. 0 или 335

Задача 4. Для натурального k определим последовательность $a_1, a_2, \ldots$ условиями $a_1 = k+1$ и $a_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_n + k$ при всех натуральных n. При каких k в этой последовательности бесконечно много точных квадратов?
Решение. Заметим, что $a_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_n + k = a_n (a_n - k) + k$. С помощью полученного равенства по индукции легко проверить, что при нечётном k число a_n даёт при делении на 4 остаток 3 для всех $n \geqslant 2$, и потому в последовательности a_n не более одного точного квадрата. Если же k чётно, то $a_{n+1} = a_n (a_n - k) + k = (a_n - k/2)^2 + (k - k^2/4)$. Поскольку a_n неограниченно возрастает, с какого-то момента оно станет настолько велико, что расстояния от $(a_n - k/2)^2$ до соседних квадратов станут больше, чем $|k - k^2/4|$. Если $k - k^2/4 \neq 0$, с этого момента в последовательности не будет ни одного точного квадрата. Если же $k - k^2/4 = 0$, то $k = 4$, и все a_n, начиная со второго, будут точными квадратами.
Ответ. 4

Задача 5. Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ состоят из целых положительных чисел. Какое наибольшее значение может принимать произведение $a_3 b_3$, если $3a_2 b_2 + a_6 b_6 \leqslant 108$?
Решение. Пусть разность прогрессии $a_1, \ldots$ равна d, а разность прогрессии $b_1, \ldots$ равна $\tilde{d}$. Тогда имеем $3a_2 b_2 + a_6 b_6 = 3(a_3 - d)\left(b_3 - \tilde{d}\right) + (a_3 + 3d)\left(b_3 + 3\tilde{d}\right) = 4a_3 b_3 + 12d\tilde{d}$

Что равносильно $4a_3 b_3 + 12d\tilde{d} \leqslant 108 \quad \Leftrightarrow \quad a_3 b_3 + 3d\tilde{d} \leqslant 27$

Так как $d \geqslant 1$ и $\tilde{d} \geqslant 1$, то получаем оценку сверху $a_3 b_3 \leqslant 24 = 6 \cdot 4$

Покажем, что эта оценка достигается. Для прогрессий 4,5,6,7,8,9,... и 2,3,4,5,6,7,... имеем: $3a_2 b_2 + a_6 b_6 = 3 \cdot 5 \cdot 3 + 9 \cdot 7 = 108$

Ответ. 24

Задача 6. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведены медиана CM, биссектриса CL и высота CH, причем медиана в 3 раза больше высоты. Во сколько раз биссектриса больше высоты?

Решение. Так как CM - медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, то $AM = MC = MB$, тогда $\angle ACM = \angle CAM = \alpha$. Далее, $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$, а значит $\angle HCB = \alpha$. Учитывая, что CL является биссектрисой прямого угла, заключаем, что CL является биссектрисой угла $\angle MCH$. Пусть $CH = x$, тогда $CM = AM = MB = 3x$. Пусть $LH = y$, поскольку CL - биссектриса треугольника MCH, то $\frac{ML}{LH} = \frac{CM}{CH} = 3$, откуда $ML = 3y$. Рассмотрим прямоугольный треугольник MCH: $(3x)^2 = (4y)^2 + x^2$, то есть $y^2 = \frac{x^2}{2}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $LCH : CL^2 = y^2 + x^2$ или $CL^2 = \frac{x^2}{2} + x^2$, откуда $CL = \frac{\sqrt{6}}{2}x$.

Ответ. в $\sqrt{6}/2$ раз

Задача 7. Через точку M, лежащую внутри треугольника ABC, проведены прямые, параллельные его сторонам. Площади образовавшихся при этом треугольников соответственно равны 4, 9 и 16 . Чему равна площадь треугольника ABC?

Решение. Заметим, что $ADMN$ и $KMLB$ - параллелограммы. Пусть $DM = x, NK = y, ML = z$ и $S_{ABC} = S$. Так как $ADMN$ и $KMLB$ - параллелограммы, то $AN = DM = x, KB = ML = z$ и $AB = x + y + z$. Из условия следует, что $\triangle DEM \sim \triangle ABC, \triangle NMK \sim \triangle ABC$ и $\triangle MTL \sim \triangle ABC$, откуда

$$\frac{S_{DEM}}{S} = \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^2, \frac{S_{NMK}}{S} = \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^2, \frac{S_{MTL}}{S} = \left(\frac{z}{x+y+z}\right)^2$$

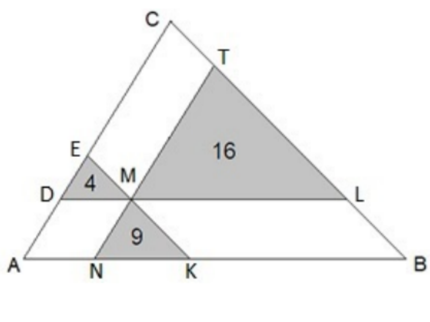
Тогда

$$\sqrt{\frac{S_{DEM}}{S}} = \frac{x}{x+y+z}, \sqrt{\frac{S_{NMK}}{S}} = \frac{y}{x+y+z}, \sqrt{\frac{S_{MTL}}{S}} = \frac{z}{x+y+z},$$

откуда

$$\sqrt{\frac{S_{DEM}}{S}} + \sqrt{\frac{S_{NMK}}{S}} + \sqrt{\frac{S_{MTL}}{S}} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$$

то есть $\sqrt{S} = \sqrt{S_{DEM}} + \sqrt{S_{NMK}} + \sqrt{S_{MTL}}$. Итак, $\sqrt{S} = \sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16} = 2 + 3 + 4 = 9$, но тогда $S = 81$.



Ответ. 81

Задача 8. Между городами ездит поезд с постоянной скоростью, кроме двух участков, на которых он вынужден ехать с меньшей скоростью ввиду их плохого состояния. Если отремонтировать любой из этих участков, то средняя скорость поезда увеличится на треть. Во сколько раз она увеличится, если отремонтировать оба участка?

Решение. Если скорость увеличилась на треть, а расстояние не изменилось, то время в пути стало составлять $1 : 4/3 = 3/4$ от прежнего, то есть уменьшилось на четверть. Если отремонтировать второй участок, время сократится ещё на четверть от исходного, то есть станет наполовину меньше прежнего. Если время уменьшилось вдвое, то средняя скорость вдвое возросла.

Ответ. в 2 раза

Задача 9. Графиком функции $y = f(x)$ является прямая. Найдите эту функцию, если известно, что для всех x выполняется равенство: $f(f(x)) + 20 = 2f(x) + 5$.
Решение. Пусть $f(x) = kx + b$. Тогда $f(f(x)) = k(kx + b) + b = k^2x + kb + b$, подставляем в уравнение: $k^2x + kb + b + 20 = 2kx + 2b + 5$. Приравниваем коэффициенты: $k^2 = 2k, \quad kb + b + 20 = 2b + 5$. Из первого уравнения: $k(k - 2) = 0$, поэтому $k = 0$ или $k = 2$. При $k = 0$: $b + 20 = 2b + 5 \Rightarrow b = 15, f(x) = 15$.
При $k = 2$: $2b + b + 20 = 2b + 5 \Rightarrow 3b + 20 = 2b + 5 \Rightarrow b = -15, f(x) = 2x - 15$.
Ответ. $f(x) = 2x - 15$, $f(x) = 15$

Задача 10. Точки A, B, C лежат на графике $y = x^2$. Оказалось, что медиана BM треугольника ABC параллельна оси ординат и имеет длину 2. Найдите площадь треугольника ABC.
Решение. Обозначим координаты точек $A\left(x_a, y_a\right), B\left(x_b, y_b\right), C\left(x_c, y_c\right)$. Тогда $y_a = x_a^2$, $y_b = {x_b}^2, y_c = {x_c}^2$. Точка M имеет координаты (x_m, y_m), где $x_m = \left(x_a + x_c\right)/2, y_m = \left(y_a + y_c\right)/2$. По условию $x_b = x_m$ и $y_m - y_b = 2$. Площадь $S(ABC)$ равна $\left|x_c - x_a\right|\left(y_m - y_b\right)/2 = \left|x_c - x_a\right|$. Заметим, что $y_m - y_b = 2 \Rightarrow \left(x_a^2 + x_c^2\right)/2 - \left(x_a + x_c\right)^2/4 = 2 \Rightarrow \left(x_a - x_c\right)^2/4 = 2 \Rightarrow \left|x_a - x_c\right| = 2\sqrt{2}$.
Ответ. $2\sqrt{2}$

Задача 11. В вершинах правильной шестиугольной призмы расставлены натуральные числа от 1 до 12, каждое использовано по одному разу. Назовём грань призмы богатой, если сумма чисел в её вершинах не меньше 40. Найдите наибольшее возможное количество богатых граней и приведите пример расстановки чисел
Решение. Сумма чисел от 1 до 12 равна 78 . Поэтому любые две богатые грани должны иметь общее ребро: иначе сумма чисел уже на них будет больше 78 . Значит, среди богатых граней не больше двух боковых и не больше одного основания. Пример, когда богатых граней ровно три: 10,12,9,6,5,4 на верхнем основании и 7,11,8,1,2,3 соответственно на нижнем основании.
Ответ. 3, 10,12,9,6,5,4 на верхнем основании и 7,11,8,1,2,3 соответственно на нижнем основании.

Задача 12. Сколькими способами можно разменять сумму в 102 рубля монетами 1, 2 и 5 рублей? Способы считаются различными, если в них разное количество хотя бы одного вида монет. В размене не обязательно должны участвовать все три вида монет одновременно.
Решение. Способ размена однозначно определяется количеством монет в 2 рубля (y) и 5 рублей (z). Тогда количество монет в 1 рубль равно $x = 102 - 2y - 5z$, что неотрицательно при условии $2y + 5z \leqslant 102$. Таким образом, задача сводится к подсчёту количества пар неотрицательных целых чисел (y, z), для которых $2y + 5z \leqslant 102$. При этом y может быть от 0 до 51, а z — от 0 до 20.

Рассмотрим все пары (y, z) с $0 \leqslant y \leqslant 51$ и $0 \leqslant z \leqslant 20$. Общее количество таких пар равно $52 \times 21 = 1092$. Величина $T = 2y + 5z$ изменяется от 0 до $2 \times 51 + 5 \times 20 = 202$.

Рассмотрим преобразование: $(y, z) \mapsto (51 - y, 20 - z)$. Тогда новая величина: $T' = 2(51 - y) + 5(20 - z) = 102 - 2y + 100 - 5z = 202 - T$. Это преобразование устанавливает взаимно однозначное соответствие между парами с $T > 101$ и парами с $T < 101$. Пары с $T = 101$ переходят в себя.

Пусть B — количество пар с $T = 101$. Тогда количество пар с $T < 101$ равно количеству пар с $T > 101$. Из общего числа пар: $2A + B = 1092$, где A — количество пар с $T < 101$. Отсюда: $A = \frac{1092 - B}{2}$.

Найдём B из уравнения $2y + 5z = 101$. Так как 101 нечётно, $5z$ должно быть нечётным, поэтому z нечётно. Пусть $z = 2k + 1$, тогда:

$$2y = 101 - 5(2k + 1) = 96 - 10k, \quad y = 48 - 5k.$$

Условия $z \leqslant 20$ и $y \geqslant 0$ дают $2k + 1 \leqslant 20$ и $48 - 5k \geqslant 0$, откуда $k \leqslant 9$. Таким образом, $k = 0, 1, \ldots, 9$, то есть $B = 10$.

Теперь найдём количество пар с $T \leqslant 102$. Это множество состоит из пар с $T < 101$, $T = 101$ и $T = 102$. Количество пар с $T < 101$ равно:

$$A = \frac{1092 - 10}{2} = 541.$$

Количество пар с $T = 101$ равно $B = 10$. Найдём количество пар с $T = 102$ (обозначим через D). Уравнение $2y + 5z = 102$. Так как 102 чётно, $5z$ должно быть чётным, поэтому z чётно. Пусть $z = 2k$, тогда: $2y = 102 - 10k, \quad y = 51 - 5k$. Условия $z \leqslant 20$ и $y \geqslant 0$ дают $2k \leqslant 20$ и $51 - 5k \geqslant 0$, откуда $k \leqslant 10$. Таким образом, $k = 0, 1, \ldots, 10$, то есть $D = 11$.

Искомое количество пар: $A + B + D = 541 + 10 + 11 = 562$.

Ответ. 562

Задача 13. На доске записано несколько попарно различных (вещественных) чисел, причём среди любых двадцати (попарно различных) из них найдутся 10 (попарно различных), сумма которых равна 100. Каково наибольшее возможное количество чисел на доске?

Решение. *Оценка.* Если чисел больше 30, то рассмотрим двадцать наибольших и двадцать наименьших. Они пересекаются максимум по девяти числам, поэтому сумма любой десятки из двадцати наибольших окажется больше, чем сумма любой десятки среди 20 наименьших.

Пример. Возьмём целые числа от -5 до 25, исключая число 10. Эти числа разбиваются на 15 пар, в каждой паре сумма чисел равна 20. Среди любых 20 чисел найдётся хотя бы 5 неразбитых пар, их мы и возьмём для того, чтобы сумма чисел равнялась 100.

Ответ. 30

Задача 14. Найдите количество пар целых чисел ($x; y$), удовлетворяющих равенству: $x^2 + xy + 2x = 300000$.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $x(x + y + 2) = 3 \cdot 2^5 \cdot 5^5$. Тогда если $x > 0$, то x является одним из делителей правой части. Всего у правой части $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ делителей (так как любой делитель представим в виде $3^a \cdot 2^b \cdot 5^c$, где a, b и c - целые неотрицательные числа, не превосходящие соответственно 1,5 и 5 , т. е. есть 2 способа выбрать a, 6 способов выбрать b и 6 способов выбрать c). Заметим, что если правая часть делится на x, то тогда автоматически выходит, что $y \in \mathbb{Z}$, и при этом y находится однозначно. Также для x учитываем все полученные выше значения со знаком минус. Следовательно, всего есть $2 \cdot 72 = 144$ пары чисел.

Ответ. 144

Задача 15. Решите в вещественных числах систему

$$x\left(y + z - x^3\right) = y\left(z + x - y^3\right) = z\left(x + y - z^3\right) = 1$$

Решение. Очевидно, среди чисел x, y, z нет 0 . Изменив, если нужно, знаки всех трёх чисел, мы добьёмся, чтобы среди них было не меньше двух положительных, скажем, x и y. Если при этом $z < 0$, то $z\left(x + y - z^3\right) < 0$ - противоречие. Таким образом, мы можем считать, что все три числа положительны.

Имеем $y + z = x^3 + \frac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{x^3 \cdot \frac{1}{x}} = 2x$. Аналогично $z + x \geqslant 2y, x + y \geqslant 2z$. Иными словами, каждое из трёх чисел x, y, z не больше среднего арифметического двух других. Это значит, что числа равны, а тогда $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ и $x = y = z = 1$. Сменой всех знаков получаем второе решение.

Ответ. $x = y = z = 1, x = y = z = -1$

Задача 16. Каждая клетка квадратной таблицы 100×100 окрашена в один из k цветов. Оказалось, что для любых трёх клеток одного цвета, находящихся в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток этого же цвета. При каком наименьшем k это возможно?

Решение. Докажем, что количество клеток каждого цвета не больше 300 ; отсюда будет следовать, что число цветов не меньше $100^2/300 > 33$, то есть $k \geqslant 34$. Рассмотрим все клетки этого цвета, и в каждом столбце отметим все такие клетки, кроме двух нижних. Справа от каждой отмеченной клетки нет клеток этого же цвета; значит, все отмеченные клетки лежат в разных строках, и их не больше 100 . Неотмеченных же клеток не больше, чем по две в столбце, то есть всего не больше 200. Отсюда и следует требуемая оценка.

Для примера пронумеруем диагонали, идущие влево-вверх, последовательно числами от 1 до 199 и покрасим клетки i-й диагонали в цвет с номером $[i/3] \pmod{34}$. Нетрудно видеть, что в каждой строке и в каждом столбце одноцветные клетки идут последовательно, и их там не больше трёх. Отсюда нетрудно получить, что пример подходит.
Ответ. 34

Задача 17. Какие натуральные числа можно представить в виде суммы нескольких (не обязательно всех) своих различных делителей, образующих арифметическую прогрессию?
Решение. Пусть $n = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$ — нужное представление, в котором слагаемые упорядочены по возрастанию. Достаточно рассмотреть случай, когда эти делители в совокупности взаимно просты: искомыми будут все кратные найденных чисел. Тогда в силу условия справедливо равенство НОД $(d_1, d_2) = (d_2, d_3) = \ldots = (d_{k-1}, d_k) = 1$, и число n делится на произведение $d_{k-1}d_k$, что приводит к неравенству $kd_k > n \geqslant (k-1)d_k \Rightarrow n = (k-1)d_k \Rightarrow d_i = i$ при всех $i = 1,2, \ldots, k-1$. Но, поскольку слагаемые образуют арифметическую прогрессию, $d_k = k \Rightarrow n = \frac{k(k+1)}{2} = k(k-1) \Rightarrow k = 3, n = 6$, откуда и следует ответ.
Ответ. кратные 6

Задача 18. На выходе станции метро установлены три одинаковых эскалатора длиной 60 метров: первый — неподвижный, второй движется вверх, третий — вниз с той же скоростью. Одновременно со станции начали подниматься три пассажира: Антонио поднимается по неподвижному эскалатору, Борисио — по движущемуся вверх эскалатору с такой же скоростью, а Вованио по движущемуся вниз эскалатору со скоростью в 3 раза больше. Когда через 10 минут Борисио достиг верха эскалатора, Вованио оставалось до верха в 1,5 раза меньше, чем Антонио. Найдите скорость эскалатора.
Решение. Пусть u — собственная скорость Антонио (в м/мин), v — скорость эскалатора (в м/мин). Через 10 минут Борисио достиг верхней точки:

$$\frac{60}{u+v} = 10 \quad \Rightarrow \quad u + v = 6 \quad (1)$$

За это время:
- Антонио прошёл $10u$, ему осталось $60 - 10u$
- Вованио прошёл $10(3u - v)$, ему осталось $60 - 10(3u - v) = 60 - 30u + 10v$
По условию оставшееся у Вованио $= \frac{2}{3}$ оставшегося у Антонио

$$60 - 30u + 10v = \frac{2}{3}(60 - 10u), 60 - 30u + 10v = 40 - \frac{20}{3}u,$$
$$20 - 30u + 10v = -\frac{20}{3}u, 20 + 10v = 30u - \frac{20}{3}u = \frac{70}{3}u,$$
$$60 + 30v = 70u, v = \frac{70u - 60}{30} = \frac{7u - 6}{3} \quad (2)$$

Из (1): $v = 6 - u$. Подставим в (2): $6 - u = \frac{7u-6}{3}, 3(6 - u) = 7u - 6$, $18 - 3u = 7u - 6, 24 = 10u$, $u = 2{,}4, v = 6 - 2{,}4 = 3{,}6$
Ответ. 3,6 м/мин.

Задача 19. С помощью знаков арифметических действий, скобок, а также используя каждую из цифр $1, 5, 6, 7$ ровно по одному разу, составьте выражение, значение которого равно 35.
Решение. Если можно что-то еще, то $\sqrt{(6-1)5} \cdot 7$ или $[176/5]$.
Ответ. $5/(1 - 6/7)$ или $7/(6/5 - 1)$.

Задача 20. Клетки квадрата 9×9 покрашены в шахматном порядке так, что чёрных клеток больше, чем белых. Изначально разрешается поместить фишку в любую чёрную клетку. Затем каждым ходом можно передвинуть фишку на чёрную клетку, соседнюю с текущей по вершине. Какое наименьшее количество ходов нужно сделать, чтобы обойти все чёрные клетки доски (возвращаться в исходную клетку не обязательно)?
Решение. *Оценка.* Всего чёрных клеток 41, из них 25 находятся в нечётных столбцах, а 16 –

в чётных. Так как фишка каждый раз переходит в соседний столбец, то ей придётся посетить не менее 49 клеток, т.е. сделать не менее 48 ходов.

Пример достаточно простой.

Ответ. 48 ходов

Задача 21. Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1 и меньше этого числа. Наименьший собственный делитель натурального числа равен a. Наибольший собственный делитель этого числа равен $2a^2 + 1$. Чему может быть равно это число?

Решение. Вспомним, что a — простое. Предположим противное: пусть a — составное. Тогда существует простой делитель $p < a$, который также делит число, что противоречит минимальности a.

Рассмотрим простые a:

– $a = 2$: $N = 2 \cdot (2 \cdot 4 + 1) = 18$. Собственные делители: 2, 3, 6, 9.

– $a = 3$: $N = 3 \cdot (2 \cdot 9 + 1) = 57$. Собственные делители: 3, 19.

Для $a > 3$ рассмотрим $a \mod 3$: если $a \equiv 0 \pmod 3$, то $a = 3$, а если $a \not\equiv 0 \pmod 3$, то $a^2 \equiv 1 \pmod 3$, значит $2 \cdot a^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$, то есть $3 \mid N$, и так как $a > 3$, то получаем противоречие с минимальностью a.

Ответ. 18, 57