

Математическая игра «Тетрис». 10–11 классы.



Задача 1. В тесте четыре задачи. Тема каждой задачи независимо и равновероятно выбирается из четырёх: алгебра, комбинаторика, геометрия, теория чисел. Известно, что среди четырёх задач есть хотя бы по одной задаче по алгебре, комбинаторике и геометрии. Найдите вероятность того, что среди задач есть хотя бы одна задача по теории чисел.

Задача 2. Кирилл загадал натуральное число N , в десятичной записи которого все цифры различны и ни одна из них не равна нулю. Он вычислил сумму его цифр S и произведение его цифр P . Оказалось, что если к записи числа S справа приписать запись числа P , то получится число N . Найдите N .

Задача 3. Точка E лежит на стороне AB прямоугольника $ABCD$, причём $\angle CED = 90^\circ$. Точки O , P , Q — центры окружностей, описанных около треугольников ADE , BCE и CDE соответственно. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $OQ = 20$, $OP = 29$.

Задача 4. Функция f определена для всех действительных $x \neq 0, 1$, и для каждого такого x выполняется равенство $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 24x$. Найдите $f(3)$.

Задача 5. При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?

Задача 6. В треугольнике ABC известно, что $AB = 10$, $AC = BC = 15$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке D . Найдите AD .

Задача 7. На острове расположено несколько деревень, некоторые пары деревень соединены дорогами. Между любыми двумя деревнями существует ровно один путь по дорогам. Ровно из четырёх деревень выходит больше одной дороги: из них выходит 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно. Из каждой другой деревни выходит ровно одна дорога. Сколько всего деревень на острове?

Задача 8. Числа α, β, γ — три действительных корня уравнения $x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = 0$. Найдите значение выражения $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1}$.

Задача 9. Все восьмибуквенные слова, в которых каждая из букв А, Б, В, Г встречается ровно два раза, расположили в лексикографическом порядке, в котором А идёт раньше Б, Б — раньше В, а В — раньше Г. На каком месте стоит слово БАГВГВАБ, если нумерация начинается с 1?

Задача 10. Найдите наибольшее натуральное число m , такое что $p^4 - 1$ делится на m для любого простого числа $p > 5$.

Задача 11. Треугольник ABC равносторонний. Точка D лежит на стороне BC , причём $BD = 1$, $DC = 4$. Точки E и F лежат соответственно на лучах AC и AB , а D — середина отрезка EF . Найдите EF .

Задача 12. Семь карточек с числами $1, 2, \dots, 7$ лежат в ряд в некотором порядке. За один ход разрешается поменять местами две соседние карточки. Для скольких начальных расстановок можно за несколько ходов получить порядок $1, 2, \dots, 7$ так, чтобы карточка с числом 4 участвовала не более чем в одном обмене?

Задача 13. Неотрицательные целые числа a, b, c, d удовлетворяют равенствам $ab + cd = 31$ и $ac + bd = 29$. Найдите наименьшее возможное значение $a + b + c + d$.

Задача 14. В треугольнике ABC известны $AB = 6$, $AC = 9$, $BC = 7$. Касательная к окружности, описанной около треугольника ABC , в точке A пересекает прямую BC в точке T . Найдите длину BT .

Задача 15. Натуральное число N имеет ровно 72 положительных делителя. Среди них 54 делятся на 2, а 48 — на 3. Сколько положительных делителей числа N делятся на 6?

Задача 16. Прямоугольный лист бумаги согнули по прямой так, что одна его вершина совместилась с противоположной. После сгиба получилась пятиугольная фигура: 20% её площади покрыто одним слоем бумаги, а 80% — двумя слоями. Найдите отношение длины большей стороны исходного прямоугольника к длине меньшей.

Задача 17. Шесть посёлков расположены в два ряда по три. Дорогами соединены соседние посёлки в каждом ряду, а также три пары посёлков, стоящих друг под другом. Таким образом, всего есть семь дорог. Сколькими способами можно закрыть две из них так, чтобы по оставшимся дорогам из любого посёлка можно было добраться до любого другого?

Задача 18. Многочлен P степени не выше 4 удовлетворяет равенствам $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 6$, $P(4) = 24$, $P(5) = 120$. Найдите $P(6)$.

Задача 19. На координатной плоскости даны точки $A = (2, 5)$ и $B = (12, -3)$. Точка P лежит на оси Ox , причём $AP \perp BP$. Таких точек P ровно две. Найдите сумму их абсцисс.

Задача 20. На доске написано число 1. За один ход число x на доске заменяют либо на $2x$, либо на $2x + 1$. Сделали ровно 12 ходов, причём операция $x \mapsto 2x + 1$ была применена ровно 5 раз. Найдите сумму всех различных чисел, которые могли оказаться на доске после двенадцатого хода.

Задача 21. Последовательность начинается с $a_1 = 2$. Каждый следующий член получают, прибавляя к предыдущему его наибольший простой делитель. Найдите первый член последовательности, превосходящий 2026.

Задача 22. вещественные числа x и y удовлетворяют равенствам $x^3 = 3x + y$ и $y^3 = 3y + x$. Найдите все возможные значения $x^2 + y^2$.

Задача 23. Рассмотрим граф с вершинами $A_1, \dots, A_6, B_1, \dots, B_6$. В нём проведены рёбра $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_5A_6, A_6A_1$, рёбра $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_5B_6, B_6B_1$, а также рёбра $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_6B_6$. Сколько существует способов, начиная в A_1 и двигаясь по рёбрам, пройти через каждую из остальных 11 вершин ровно один раз и вернуться в A_1 ? Обходы в противоположных направлениях считаются различными.

Задача 24. Положительные целые числа m, n, p удовлетворяют равенствам $m + n + p = 104$ и $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{4}$. Найдите наибольшее возможное значение $\max(m, n, p)$.