

Пятнадцатый Южный математический турнир

Онлайн, 15-21.10.2020

Юниор-лига. 2 тур. 17 октября 2020 г.

1. Дано натуральное число  $a$ . Последовательность  $(e_n)$  определена условиями  $e_0 = 1$  и  $e_n = a + e_0 e_1 \dots e_{n-1}$  при  $n \geq 1$ . Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, являющихся делителями членов последовательности.

2. Положительные числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 2$ ) удовлетворяют условию  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ . Докажите, что

$$\{x_1\} + \{x_2\} + \dots + \{x_n\} < \frac{2n-1}{2}.$$

3. В ряд выписаны 2020 чисел, каждое из которых равно 1 или  $-1$ . Для любого числа в ряду можно найти начинающийся с этого числа или заканчивающийся этим числом отрезок из нескольких последовательных чисел (может быть, одного), сумма которых неположительна. Какую наибольшую сумму могут иметь все числа?

4. Дан ромб  $ABCD$ . Пусть  $L$  — основание биссектрисы угла  $A$  треугольника  $ABC$ . Оказалось, что  $LC = LD$ . Найдите углы ромба.

5. В треугольнике  $ABC$   $\angle CAB = 2\angle ABC$ . Внутри треугольника  $ABC$  нашлась точка  $D$  такая, что  $AD = BD$  и  $CD = AC$ . Докажите, что  $\angle ACB = 3\angle DCB$ .

6. Последовательность  $(x_n)$ , удовлетворяющая при всех натуральных  $n$  условию

$$x_{n+2} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{1}{x_{n+1}} \right),$$

периодична. Какой может быть длина её наименьшего периода? (Укажите все возможные значения.)

7. Дано натуральное число  $k > 1$ . Для какого наименьшего натурального  $n$  на доске  $n \times n$  можно отметить несколько клеток так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было ровно  $k$  отмеченных клеток, и ни у каких двух отмеченных клеток не было ни общей стороны, ни общей вершины?

8. По кругу расставлены  $3n$  красных точек ( $n > 1$  — натуральное число). Каждую минуту Иван соединяет отрезком какие-нибудь две ещё не соединённые точки, а Митрофан перекрашивает какую-нибудь красную точку в зелёный цвет. Докажите, что, как бы ни ходил Митрофан, Иван может добиться, чтобы через  $n$  минут не менее  $\frac{n-1}{6}$  отрезков соединяли красные точки с зелёными.