

Гранд-лига. 2 тур. 04.10.2021.

1. Среди 2021 сотрудников корпорации 1400 некомпетентных. Президент корпорации хочет выявить хотя бы одного некомпетентного. Имеется множество заданий, для выполнения каждого из которых нужны ровно три сотрудника. Задание будет провалено, если хотя бы один из трёх сотрудников некомпетентен. Каждый день президент выдаёт задание трём сотрудникам, чтобы посмотреть, провалят они его или нет. За какое наименьшее количество дней он заведомо выявит некомпетентного?
2. Найдите все пары натуральных (a, b) , для которых $2ab$ делится на $a + b + 1$, а $a^2 + b^2 - 1$ делится на $a + b - 1$.
3. Фигура «Большой крест» состоит из двух клетчатых прямоугольников 1×2021 с общей центральной клеткой. Дана доска 4042×4042 . При каком наименьшем k можно вырезать из этой доски k клеток так, что из оставшейся части нельзя вырезать большой крест?
4. Средняя линия треугольника ABC , параллельная стороне BC , пересекает описанную окружность Γ треугольника ABC в точках P и Q . Касательная к Γ в A пересекает BC в точке T . Докажите, что $\angle BTQ = \angle PTA$.
5. В компании n человек. Если рассадить любых четырёх из них за круглый стол, найдётся человек, который знает обоих своих соседей, или человек, который не знает ни одного из своих соседей. Докажите, что можно разбить компанию на две части, в одной из которых все друг друга знают, а в другой никто никого не знает.
6. Для каких n существует арифметическая прогрессия a_1, a_2, \dots, a_n , состоящая из целых чисел, для которой a_i делится на i при всех i от 1 до $n - 1$, но a_n не делится на n ?
7. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - px + 1 = 0$, где $p > 2$ — простое число. Докажите, что $x_1^p + x_2^p$ — целое число, делящееся на p^2 .
8. Можно ли разрезать какой-нибудь правильный многоугольник на равные остроугольные неравносторонние треугольники?
9. Даны две окружности, для которых есть семейство четырехугольников, описанных вокруг первой окружности и вписанных во вторую (вписанно-описанные четырехугольники). Обозначим a, b, c, d последовательные длины сторон одного из таких четырехугольников. Докажите, что величина $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{d} + \frac{d}{b}$ не зависит от выбора четырехугольника.
10. Найдите наибольшее значение A , для которого неравенство

$$\frac{1 + xy}{1 + z^2} + \frac{1 + xz}{1 + y^2} + \frac{1 + yz}{1 + x^2} \geq A$$

верно при любых положительных x, y, z .