

Гранд-лига. 3 тур. 06.10.2021.

1. У Оракула есть клетчатая доска размера 2021×2021 , каждая клетка которой покрашена в чёрный или белый цвет. Угадывающая не видит доски, но может выбрать пару клеток соседних по ребру и спросить, одноцветная эта пара или нет. Какое минимальное количество вопросов понадобится Угадывающей, чтобы узнать чётность количества пар соседних клеток, цвета которых не совпадают друг с другом?
2. Известно, что x, y, z – положительные числа, удовлетворяющие соотношению $xyz = 1$. При условии положительности знаменателей докажите неравенство:

$$\frac{x^3 + y}{3z + z^2 - z^5} + \frac{y^3 + z}{3x + x^2 - x^5} + \frac{z^3 + x}{3y + y^2 - y^5} \geq 2$$

3. Найдите целую часть суммы

$$\sum_{k=2}^{2021} \sqrt{1 + \frac{2}{k^2}}.$$

4. Дано нечётное простое число p . Докажите, что существует натуральное число n такое, что $1^n + 2^n + 3^n + \dots + (p-1)^n$ делится на p^3 .
5. Найдите все положительные рациональные числа $a < b$ такие, что $a^a = b^b$.
6. Выясните, можно ли подобрать коробку в форме прямого кругового цилиндра, обладающую следующими свойствами: в эту коробку можно поместить пластмассовый конус, у которого основание совпадает с нижним основанием коробки, в вершина совпадает с центром верхнего основания коробки; и далее поместить несколько пластмассовых шаров так, чтобы каждый шар касался конуса, верхнего основания и боковой поверхности цилиндра и двух других шаров; и при этом суммарная площадь поверхности шаров равна площади боковой поверхности цилиндра.
7. Касательные в точках B и C к описанной окружности остроугольного неравностороннего треугольника ABC пересекаются в T . Пусть H – точка пересечения высот ABC , A_1 – основание высоты из точки A на сторону BC , ω – окружность описанная около BTC , O – центр ω , O_9 – центр окружности Эйлера треугольника ABC . Прямая HT пересекает ω в точке K , прямая KA_1 пересекает ω вторично в точке X . Прямая OO_9 пересекает AH в точке R . Докажите, что окружности (AA_1X) и (ARO) касаются.
8. Пусть AA_1 и CC_1 – высоты треугольника остроугольного неравностороннего треугольника ABC . Точка X движется по отрезку AC треугольника ABC так, что существует Y на прямой AC и прямые XC_1 и YC_1 симметричны относительно AC_1 . Найдите геометрическое место центров окружностей (XA_1Y) .
9. Дан выпуклый 2021-гранник. В каждой его вершине сходятся ровно 3 ребра. Докажите, что можно поставить в каждой вершине рациональное число так, чтобы хотя бы в одной из вершин оказалось число 2021, и на каждой грани произведение всех чисел, стоящих в её вершинах, было равно 1.
10. В турнире участвует 2021 команда, с номерами 1, 2, ..., 2021. Каждый день судьи выбирают 2 команды, и они играют между собой. Если номера команд отличаются хотя бы на 500, побеждает команда с меньшим номером, иначе результат может быть любым. Победитель получает 1 очко, проигравший – 0. Турнир заканчивается, когда выполнены 2 условия:
 - 1) все команды сыграли равное количество партий;
 - 2) все команды набрали разное количество очков.
 Всегда ли судьи могут добиться того, чтобы турнир закончился?