

Шестнадцатый Южный математический турнир

Сириус, 1–9.10.2021

Четвертый тур. Премьер-лига. Полуфиналы. 7 октября 2021 г.

1. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 100×100 на равное количество прямоугольников 2×4 и 1×8 ?
2. Найдите наибольшее вещественное α , для которого существует возрастающая последовательность нечётных натуральных чисел $a_0 = 1 < a_1 < a_2 < \dots$ со следующим свойством: для каждого n число a_n – наибольшее натуральное число, строго меньшее αa_{n+1} .
3. Вершины 999-угольника пусты. Два игрока по очереди ставят нули и единицы в его вершины, не снабженные числами ранее. Первый игрок начинает игру и выигрывает, если ему удастся поставить три одинаковых числа в три последовательных вершины. Второй игрок выигрывает, если к моменту, когда все вершины снабжены числами, первый игрок не добился своей цели. Кто выиграет при правильной игре?
4. Для каких простых p можно найти несколько положительных рациональных чисел, и сумма, и произведение которых равны p ?
5. В разностороннем остроугольном треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, M – середина стороны BC . На прямой, проходящей через O параллельно медиане AM , нашлась точка X такая, что прямая AX симметрична прямой AM относительно биссектрисы угла A . Окружность с центром X , проходящая через точку O , вторично пересекает серединный перпендикуляр к AB в точке Y , а серединный перпендикуляр к AC – в точке Z . Докажите, что A – середина отрезка YZ .
6. Даны различные натуральные числа m и n . В клетках бесконечной клетчатой плоскости расставлены все натуральные числа по одному разу. Докажите, что на плоскости можно выделить два прямоугольника $m \times n$ (расположенных как угодно), в которых одно и то же наибольшее число.
7. В треугольнике ABC проведены медианы BN и CM . Касательная в точке N к описанной окружности треугольника AMN пересекает сторону BC в точке S . Докажите, что прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников BMS и AMN , перпендикулярна CM .
8. В царстве под девизом "Сменяемость и Преемственность" имеется n кандидатов в депутаты парламента. Каждый год в стране выбирают парламент, состоящий из некоторых из этих кандидатов. Парламент каждого следующего созыва, начиная со второго, содержит не меньше депутатов, чем предыдущий. С другой стороны, в каждом из ранее избиравшихся парламентах должен быть ровно один депутат, которого не было в этом. Докажите, что этот праздник демократии не может продолжаться больше n лет.