Восемнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2023
Премьер-лига. 1 тур. 19.09.2023

1. В полуокружности с центром O проведена отличная от диаметра хорда AB. Точка M – середина AB, точка D лежит на луче OM вне полуокружности. Точки P и Q таковы, что прямая PQ проходит через D параллельно AB, а прямая PO пересекает полуокружность в точке C, для которой $\angle PCD = \angle DMC$, Известно, что точка M – ортоцентр треугольника OPQ. Докажите, что точка пересечения AQ и PB лежит на полуокружности.

2. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n > 0$. Докажите, что

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k(2k-1)}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2}.$$

3. Клетчатый квадрат 8×8 составлен из палочек длиной в сторону клетки. Какое наименьшее количество палочек нужно убрать, чтобы оставшиеся не образовывали ни одного прямоугольника?

4. Найдите все пары (p, n) натуральных чисел, в которых p – простое, $n > p$ и n^{n-p} является n-й степенью натурального числа.

5. Решите в вещественных числах систему $\begin{cases} x + y = z^4, \\ y + z = x^4, \\ z + x = y^4. \end{cases}$

6. Чтобы открыть волшебный сундук, необходимо произнести магический код, состоящий из n цифр от 0 до 9. Каждый раз, когда Грифук говорит сундуку придуманный им код, болтливый страж сундука в ответ называет количество разрядов, в которых названный код совпадает с магическим. (Например, если магический код – 0423, а Грифук говорит 3442, то болтливый страж сундука скажет 1). Докажите, что существует натуральное k такое, что при любом $n \geqslant k$ Грифук сможет определить магический код, сказав сундуку не более $4n - 2023$ кодов.

7. Даны натуральные числа a и $b \leqslant a$ такие, что $\text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b)$ делится на $a + 1$. Докажите, что b – квадрат натурального числа.

8. Все точки плоскости окрашены в два цвета. При этом для каждого положительного a существует равносторонний треугольник со стороной a, все вершины которого одного цвета.

Докажите, что для любого треугольника существует равный ему треугольник, все вершины которого одного цвета.