XVIII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Гранд-лига. 2 тур. 21.09.2023.

1. В треугольнике ABC нарисовали вневписанные окружности. Они касаются сторон BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Отметили середины A_0, B_0, C_0 отрезков AA', BB', CC'. Затем всё стерли, кроме точек A_0, B_0, C_0. Можно ли циркулем и линейкой восстановить треугольник ABC? (Л. Емельянов)

2. В каждом узле бесконечной клетчатой плоскости расставляют действительные числа, причем в точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ стоят соответственно числа a, b, c, d, e. Верно ли, что для каждого упорядоченного набора $\{a, b, c, d, e\}$ существует и единственна расстановка чисел такая, что для каждого прямоугольника с вершинами в узлах, одна из вершин которого — точка $O(0,0)$, суммы чисел в противоположных вершинах равны?

3. Докажите, что треугольник является остроугольным тогда и только тогда, когда сумма радиусов его вписанной и трех вневписанных окружностей меньше его периметра.

   (И. Вайнштейн (задачник "Кванта"), модификация М. Дидина)

4. Пусть $a_k = \dfrac{2^{2^k} \cdot 2^{k+1}}{2^{2^k} + 3^{2^k}}$. Докажите, что $a_0 + a_1 + \ldots + a_{2023} < 4$.

5. Дано натуральное n. На окружности поставлено $8n + 2$ точки. Аня помечает эти точки натуральными числами от 1 до $4n + 1$ так, что каждым числом помечено ровно 2 точки. Боря должен соединить все эти точки $4n + 1$ не пересекающимися хордами. *Типом хорды* называем (не упорядоченную) пару пометок ее концов. Для какого наименьшего k Боря заведомо может провести хорды так, чтобы они принадлежали не более чем k типам хорд?

   (Г. Челноков, М. Дидин)

6. Пусть n — натуральное число, а q — простое. Докажите, что число $n^q + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ не является степенью числа q.

7. Точки D, E, F лежат на сторонах треугольника ABC так, что AD, BE, CF пересекаются в точке P. Пусть A_1 — пересечения прямой BC и касательной, проведенной в точке A к окружности (AEF). Пусть Q — точка, изогонально сопряженная точке P в треугольнике ABC. Касательные к окружности (ABC), проведенные из точки A_1, касаются этой окружности в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через Q.

8. Даны простое $p > 2$ и натуральные числа a, b m, r такие, что ab не кратно p и $m^2 < ab$. Докажите, что существует не более одной пары взаимно простых чисел (x, y) таких, что
$$ax^2 + by^2 = mp^r.$$

9. Всегда ли в плоском двудольном графе G можно выбрать по вершине в каждой грани так, чтобы все выбранные вершины были различны?

   (Грани — это области (включая бесконечную область), на которые разрезают плоскость ребра графа.)

10. Пусть n и k — натуральные числа. Кэти играет в следующую игру. Есть n шариков пронумерованных от 1 до n и k коробок. Изначально все шарики помещаются в одну коробку. Каждый ход Кэти выбирает непустую коробку, выбирает в этой коробке шарик с наименьшим номером i и перемещает его либо в пустую коробку, либо в коробку, содержащую шарик $i + 1$. Кэти выигрывает, если в некоторый момент появляется коробка, содержащая только шарик n. Определите все пары натуральных чисел (n, k), для которых Кэти сможет выиграть эту игру.