XVIII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»
Гранд-лига. 3 тур. 23.09.2023.

1. Пусть $a, b, c, d \in [0,1]$. Докажите, что
$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+d}+\frac{1}{1+d+a} \leq \frac{4}{1+2\sqrt[4]{abcd}}.$$

2. Точка P лежит внутри треугольника ABC. Лучи AP, BP и CP пересекаются с противоположными сторонами треугольника ABC в точках A', B' и C' соответственно. Пусть P_A — середина отрезка, соединяющего центры вписанных окружностей треугольников BPC' и CPB'. Определим точки P_B и P_C аналогично. Докажите, что если $AB' + BC' + CA' = AC' + BA' + CB'$, то точки P, P_A, P_B и P_C лежат на одной окружности.

3. Дано $n \geq 4$. Рассматриваются пары выпуклых n-угольников P_1 и P_2, у которых нет совпадающих вершин. Вершина одного из этих многоугольников называется *хорошей*, если она лежит на границе другого многоугольника. Найдите наибольшее возможное количество хороших вершин (среди всех $2n$ вершин многоугольников).

4. Пусть L_m — клетчатый уголок из $2m-1$ клеток (т.е. объединение двух клетчатых прямоугольников $1 \times m$, имеющих общую крайнюю клетку). Используя несколько уголков L_{m_1}, L_{m_2}, …, L_{m_k}, мы покрываем доску $n \times n$, так что границы фигурок идут по линиям сетки, каждая клетка доски покрыта хотя бы одним уголком, и уголки не выходят за границы доски (k — не фиксировано). Найдите минимальное возможное значение суммы $m_1 + m_2 + \dots + m_k$.

5. Найдите все непостоянные многочлены с вещественными коэффициентами $P(x)$ такие, что многочлен $P(x^3-1)$ делится на многочлен $P(x^2+x+1)$.

6. Найдите все натуральные n, для которых существует перестановка σ чисел $\{1, 2, \dots, n\}$ такая, что
$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) \cdot (-2)^i = 0.$$

7. Пусть в треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 — диаметрально противоположны точкам A_1 и B_1 на вписанной окружности. Докажите, что центр окружности (AA_2B_1) лежит на (ABC) тогда и только тогда, когда центр окружности (BB_2A_1) лежит на (ABC). (Д. Игнатьев)

8. Последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ удовлетворяют при всех n соотношению $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Может ли оказаться, что каждое натуральное число встречается в каждой из двух последовательностей ровно один раз?

9. Дано натуральное n. Анна и Белла играют в следующую игру на правильном n-угольнике, в вершинах которого сидят дрессированные индейки. Белла хочет собрать все индеек в одной вершине, а Анна хочет ей помешать. В начале Анна нумерует вершины числами $1, 2, \dots, n$ в том порядке, в каком захочет. Затем Белла дает команды индейкам. Если Белла свистнет, то каждая индейка перейдет в соседнюю вершину, причем из двух соседних вершин она выберет вершину с меньшим номером. Если же Белла хлопнет в ладоши, то снова каждая индейка перейдет в соседнюю вершину, но из двух соседних вершин она выберет вершину с бо́льшим номером. При каких n Белла сможет выиграть?

10. Рассмотрим доску размером 2018×2019 с целыми числами в каждой клетке. Две клетки считаются соседними, если у них есть общая сторона. В каждый ход можно выбрать несколько клеток. Затем для каждой выбранной клетки вычисляется среднее значение чисел в соседних с ней клетках. После выполнения этих вычислений число в каждой выбранной клетке заменяется соответствующим средним значением. Всегда ли возможно сделать так, чтобы числа во всех клетках стали одинаковыми после конечного числа ходов?