Восемнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2023
Премьер-лига. Четвёртый тур. 24.09.2023

1. В неравнобедренном треугольнике ABC сторона BC — наименьшая. Точки M и N расположены на сторонах AB и AC соответственно так, что $BM = CN = BC$. Точки I и O – центры соответственно вписанной и описанной окружностей треугольника ABC, а D и E – центры соответственно вписанной и описанной окружностей треугольника AMN. Докажите, что прямые IO и DE пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

2. В остроугольном треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, H – ортоцентр и $AC < AB < BC$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямую AH в точке P, а описанная окружность треугольника OHP пересекает отрезок BH в точке Q. Докажите, что прямая BC касается описанной окружности треугольника ABQ.

3. Дано (не обязательно конечное) множество простых чисел Q. Для натурального числа n обозначим $p(n)$ сумму степеней всех простых чисел в разложении n на простые множители, а $q(n)$ — сумму степеней только простых чисел, входящих в Q. (Например, если $Q = \{3, 7\}$, то $p(42) = 3$, $q(42) = 2$, $p(63) = 3$, $q(63) = 3$, $p(2022) = 3$, $q(2022) = 1$). Натуральное число n назовём *особым*, если оба числа $p(n)+p(n+1)$ и $q(n)+q(n+1)$ четны. Докажите, что существует константа $c > 0$, не зависящая от множества Q, такая, что при любом натуральном $N > 10^{100}$ количество особых чисел, не превосходящих N, не меньше cN.

4. Сколько существует перестановок $a_1, \ldots, a_{100}$ чисел $1, 2, \ldots, 100$ таких, что для каждого $1 \leqslant i \leqslant 100$ число $2i$ делится на a_i?

5. Найдите все тройки (a, b, c) натуральных чисел такие, что $\frac{a}{2^a} = \frac{b}{2^b} + \frac{c}{2^c}$.

6. На доске написаны s последовательностей целых чисел длины 10. Люси может взять любые две (не обязательно различные) последовательности $(v_1, \ldots, v_{10})$ и $(w_1, \ldots, w_{10})$, уже написанные на доске, и дописать на доску любую из последовательностей $(v_1 + w_1, \ldots, v_{10} + w_{10})$ и $(\max(v_1, w_1), \ldots, \max(v_{10}, w_{10}))$.

Оказалось, что таким образом Люси может за несколько шагов записать на доске любую последовательность целых чисел длины 10. При каком наименьшем s такое возможно?

7. Вещественные числа x, y и z таковы, что $x^2 = y + 2$, $y^2 = z + 2$ и $z^2 = x + 2$. Докажите, что $x + y + z$ — целое число.

8. Сумма n вещественных чисел равна 0. Каждые два из этих чисел, которые отличаются хотя бы на 1, перемножили. Докажите, что сумма получившихся произведений (если они есть) отрицательна.