XVIII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Высшая. Четвёртый тур. 24.09.2023.

1. Есть 101 красная карточка с числами от 1 до 101 (по одному разу) и 101 синяя карточка с числами от 1 до 101 (по одному разу). Петя хочет выбрать несколько карточек так, чтобы:

1) синих карточек было выбрано ровно 51,

2) была выбрана хотя бы одна красная карточка,

3) наибольшее из чисел на выбранных красных карточках равно наименьшему из чисел на выбранных синих карточках.

Докажите, что количество способов это сделать равно степени двойки.

2. Есть 2023 палочки длинами 1, 2, 3, …, 2023. Два игрока по очереди берут себе по одной палочке, пока не останется ровно 3 палочки. Первый игрок выигрывает, если из этих трёх оставшихся палочек можно сложить треугольник, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

3. При каком наименьшем натуральном N в клетки доски 10×10 можно расставить 100 различных натуральных чисел, не превосходящих N, так, чтобы в каждой фигурке из 4 клеток в форме буквы Т сумма чисел делилась на 5?

4. Найдите все тройки натуральных чисел m, n, k таких, что

$$\text{НОД}(m,n) + \text{НОД}(n,k) + \text{НОД}(k,m) = (m+n+k)/2.$$

5. Внутри треугольника ABC проведена высота AH. В треугольники ABH и ACH вписаны окружности с центрами I и J. Оказалось, что $AI = AJ$. Можно ли утверждать, что треугольник ABC равнобедренный?

6. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z), удовлетворяющие уравнению

$$2(x+y+z+2xyz)^2 = (2xy+2yz+2zx+1)^2 + 2023.$$

7. В Орлёнок приехали n школьников, некоторые из которых знакомы между собой. Оказалось, что любой орлятский круг (рядом стоят только знакомые школьники), кроме одного, состоит из чётного числа школьников. Докажите, что всех приехавших можно распределить по трём отрядам так, чтобы ни в одном отряде не оказалось пары знакомых школьников.

8. Докажите, что в таблице $n \times n$ можно расставить все числа 1, 2, …, n^2 по одному разу так, чтобы суммы чисел во всех доминошках были различны.

XVIII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старт-лига Первая. Четвёртый тур. 24.09.2023.

1. Есть 11 красных карточек с числами от 1 до 11 (по одному разу) и 11 синих карточек с числами от 1 до 11 (по одному разу). Петя хочет выбрать несколько карточек так, чтобы:

1) синих карточек было выбрано ровно 6 штук,

2) была выбрана хотя бы одна красная карточка,

3) наибольшее из чисел на выбранных красных карточках равно наименьшему из чисел на выбранных синих карточках.

Докажите, что количество способов это сделать равно степени двойки.

2. Натуральное число, большее 10, назовём *стабильным*, если при смене местами некоторых двух его различных ненулевых цифр множество его простых делителей сохранилось. Существует ли стабильное трёхзначное число?

3. Пете и Васе сообщили по одной цифре. Ребятам сказали, что из их цифр можно составить двузначное число, являющееся точным квадратом. Петя сказал: «Я не знаю твою цифру». Вася ответил: «И я твою не знаю». Какая цифра у Васи?

4. Двое по очереди вписывают в квадратики различные цифры (по одной цифре за ход), пока и слева, и справа не образуются суммы двузначных чисел (ноль в начале числа вписывать нельзя). Если равенство окажется верным, выигрывает второй, иначе — первый. Кто выиграет?

$$\square\square + \square\square = \square\square + \square\square$$

5. При каком наименьшем натуральном N в клетки доски 10×10 можно расставить 100 различных натуральных чисел, не превосходящих N, так, чтобы в каждой фигурке из 4 клеток в форме буквы Т сумма чисел делилась на 5 ?

6. Докажите, что в таблице $n \times n$ можно расставить все числа 1, 2, $\ldots$, n^2 по одному разу так, чтобы суммы чисел во всех доминошках были различны.

7. Внутри квадрата $ABCD$ построен равнобедренный треугольник BCE ($BE = CE$). Прямые BE и CD пересекаются в точке P. Оказалось, что отрезок, соединяющий середины отрезков ED и AP, равен половине стороны квадрата. Докажите, что треугольник BCE — равносторонний.

8. Пусть a, b, и c — три положительных числа, для которых:

$$abc = 1, \quad a + \frac{1}{c} = 5, \quad b + \frac{1}{a} = 29.$$

Чему равно $c + \dfrac{1}{b}$?