XVIII Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 19–25.09.2023

Юниор-лига. Полуфинал. 24.09.2023

1. На координатной плоскости построили график функции $y = ax^2$ и отметили на нём точки A и B с положительными абсциссами, после чего стёрли ось ординат, а от параболы оставили только дугу AB. Как с помощью циркуля и линейки восстановить вершину параболы?

2. На доске написаны s последовательностей целых чисел длины 10. Люси может взять любые две (не обязательно различные) последовательности $(v_1, \ldots, v_{10})$ и $(w_1, \ldots, w_{10})$, уже написанные на доске, и дописать на доску любую из последовательностей $(v_1 + w_1, \ldots, v_{10} + w_{10})$ и $(\max(v_1, w_1), \ldots, \max(v_{10}, w_{10}))$.

Оказалось, что таким образом Люси может за несколько шагов записать на доске любую последовательность целых чисел длины 10. При каком наименьшем s такое возможно?

3. Пусть x, y и z — вещественные числа такие, что $x^2 = y + 2$, $y^2 = z + 2$ и $z^2 = x + 2$. Докажите, что $x + y + z$ — целое число.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность Ω. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, BL — биссектриса этого же треугольника. На окружности (AIC) взята произвольная точка P. Окружность (BPD) пересекает биссектрису угла ADC в точке $Q \neq D$. Докажите, что углы $\angle APL$ и $\angle QPC$ равны или в сумме дают 180 градусов.

5. Сумма n вещественных чисел равна 0. Каждые два из этих чисел, которые отличаются хотя бы на 1, перемножили. Докажите, что сумма получившихся произведений (если они есть) отрицательна.

6. Докажите, что граф, в котором никакие два цикла нечётной длины не пересекаются, можно раскрасить в три цвета правильным образом.

7. Пусть ABC — остроугольный треугольник, $AB < AC$, а D, E, F — точки касания вписанной окружности ω со сторонами BC, AC, AB соответственно. Пусть M, N лежит на EF так, что $MB \perp BC$ и $NC \perp BC$. MD и ND пересекают окружность ω в точках D и Q соответственно. Докажите, что $DP = DQ$.

8. Найдите все упорядоченные пары натуральных чисел $(x,\, y)$, такие что

$$\frac{(x+y)(xy-1)}{xy+1} = p,$$

где p — некоторое простое число.