XVIII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»
Гранд-лига. Финал. 25.09.2023.

1. На плоскости в красный цвет окрашено $8N^3$ узлов решетки. В каждой красной точке P написано общее количество красных точек на вертикальной и горизонтальной прямых, проходящих через P. Докажите, что существует число, которое записывается не менее $N+1$ раз.

2. Найдите все пары (p, n), где p - простое, n - натуральное число, такие что $\dfrac{n^p+1}{p^n+1}$ — целое число.

3. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка P. Точки A_0, B_0, C_0 — проекции точки P на прямые BC, AC, AB соответственно. Прямая, параллельная прямой A_0B_0, пересекает прямые PA_0, PB_0, PC_0 в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Окружности $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ описаны около треугольников $AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C$ соответственно. Докажите, что окружности $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ и описанная окружность треугольника ABC проходят через одну точку.
(А. Терешин)

4. Пусть точка A_1 — середина меньшей дуги BC описанной около остроугольного треугольника ABC окружности. Точку A_1 отразили относительно стороны BC, а затем её образ отразили относительно биссектрисы угла BAC и получили точку A_2. Аналогично получили точки B_2 и C_2. Докажите, что прямая Эйлера треугольника $A_2B_2C_2$ проходит через центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC. (А. Терешин)

5. Дано натуральное n. В племени Тумба-Юмба из $n(n+1)$ человек проводят выборы вождя. Баллотируются действующий вождь и n других кандидатов. У каждого члена племени есть список предпочтений. Ровно у n из них действующий вождь занимает в этом списке первое место, ещё у n — второе место, $\ldots$, ещё у n — последнее место. Действующий вождь, разузнавший все эти списки, решил снять с выборов нескольких (не всех) конкурентов. Обязательно ли ему удастся таким путём занять первое место на выборах (т.е. набрать голосов строго больше, чем любой из остальных кандидатов)? (Каждый человек на выборах голосует за наиболее высокого в своем списке предпочтений из неснятых с выборов кандидатов.) (М. Дидин)

6. Дано натуральное число $n \geq 3$ и граф G с хроматическим числом $\chi(G) = n$, у которого больше чем n вершин. Докажите, что в G найдутся два не пересекающихся по вершинам подграфа G_1 и G_2 такие, что $\chi(G_1) + \chi(G_2) \geq n+1$. (В. Дольников)

7. На плоскости даны n^2 отрезков (стен), никакие два из которых не параллельны и не имеют общих точек. Докажите, что в некоторых n точках плоскости, не лежащих на отрезках, можно поставить по гангстеру так, чтобы никакие два из них не видели друг друга (т.е. отрезок, соединяющий их, пересекал хотя бы одну из стен).

8. Дано натуральное $n > 10$. Найдите все упорядоченные наборы ненулевых вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такие, что
$$\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_n+\frac{1}{x_1}\right)=\left(x_1^2+\frac{1}{x_2^2}\right)\left(x_2^2+\frac{1}{x_3^2}\right)\ldots\left(x_n^2+\frac{1}{x_1^2}\right).$$

9. Докажите, что при всех натуральных $n > 3$, многочлен $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1$ нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

10. Пусть $n \geqslant 3$ — фиксированное целое число. Число 1 пишется n раз на доске. Под классной доской есть две корзины, которые изначально пусты. Ход состоит из стирания двух чисел a и b, замены их числами 1 и $a+b$, затем добавления одного камня в первую корзину и НОД(a, b) камней — во вторую корзину. После некоторого конечного числа ходов в первой корзине остается s камней, а во второй — t камней, где s и t — целые положительные числа. Найдите все возможные значения отношения t/s.