Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Лига "Гранд", 2 тур. 15.09.2011

1. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что $p(p-7)+q(q-7)=r(r-7)$.

2. На доске 2011×2011 стоит один корабль в виде L-тетрамино (располагаться по клеткам он может любым способом). Какое наименьшее количество выстрелов нужно сделать по клеткам доски, чтобы заведомо попасть в корабль?

3. На дуге CD описанной окружности прямоугольника $ABCD$ взята точка P. Точки K, L и M – основания перпендикуляров, опущенных из P на прямые AB, AC и BD соответственно. Докажите, что $\angle LKM = 45^\circ$ тогда и только тогда, когда $ABCD$ – квадрат.

4. Равнобедренный треугольник ABC ($AC = BC$) вписан в окружность k. Точка M лежит на стороне BC. На луче AM выбрана точка N так что $AN = AC$. Окружность, описанная около треугольника MCN, пересекает k в точках P и C, где P лежит на дуге BC, не содержащей точки A. Прямые AB и CP пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая QM делит пополам угол между прямыми MB и MN.

5, Вещественные числа a_1, a_2, …, a_n таковы, что $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$ и $|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|=1$. Докажите, что $|a_1+2a_2+\ldots+na_n| \leqslant \frac{n-1}{2}$.

6. Найдите все пары функций $f,\ g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ такие, что для всех $x, y \in \mathbb{Q}$ выполнены равенства $f(g(x)-g(y)) = f(g(x))-y$ и $g(f(x)-f(y)) = g(f(x))-y$.

7. Дан правильный $2n$-угольник (n – натуральное). В нем покрашено $2n$ диагоналей так, что из каждой вершины выходит ровно 2 покрашенные диагонали. Докажите, что найдутся две параллельные покрашенные диагонали.

8. На плоскости нарисована система координат (две перпендикулярные оси). Полина отметила начало координат O, а также точки с целыми координатами A и B такие что O, A и B являются вершинами треугольника, внутри и на границе которого нет точек с целыми координатами за исключением его вершин. После этого Катя стерла оси координат. Помогите Полине по точкам O, A, B восстановить оси координат (с помощью линейки и циркуля).

9. Даны k попарно различных натуральных чисел. Известно, что НОК любых двух из них не превосходит 10000. Докажите, что $k \leqslant 200$.

10. Решите в целых числах уравнение $x^3y^2(2y-x) = x^2y^4-36$.

Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Второй тур. Премьер-лига. 15 сентября 2011 г.

1. Даны вещественные числа $a, b, c, d > 0$ и $e, f, g, h < 0$. Докажите, что все неравенства $ae + bc > 0$, $ef + cg > 0$, $fd + gh > 0$, $da + hb > 0$ не могут выполняться одновременно.

2. На доске 12×12 для игры в "морской бой" стоит один корабль в виде L-тетрамино (располагаться по клеткам он может любым способом). Какое наименьшее количество выстрелов нужно сделать по клеткам доски, чтобы заведомо попасть в корабль?

3. На дуге CD описанной окружности квадрата $ABCD$ взята точка P. Точки K, L и M – основания перпендикуляров, опущенных из P на прямые AB, BC и AD соответственно. Найдите $\angle LKM$.

4. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает серединный перпендикуляр к AB в точке K. Высоты треугольника ABC, проведенные из вершин A и B, пересекают отрезок CK в точках P и Q соответственно. Известно, что треугольники AKP и BKQ равновелики. Найдите угол C.

5. Вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$ и $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| = 1$. Докажите, что $|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leqslant \frac{n-1}{2}$.

6. Найдите все натуральные n, для которых $8^n + n$ делится на $2^n + n$.

7. Сумма четырех натуральных чисел a, b, c, d – простое число p. Докажите, что $ab - cd$ не делится на p.

8. Тайный совет королевства Субординация строго упорядочил все 10 городов королевства по степени их *значимости*. Государственная авиакомпания "Значимые авиалинии" хочет соединить некоторые города двусторонними авиарейсами таким образом, что если город A соединен рейсом с более значимым городом B и C значимее B, то между A и C также имеется рейс. Сколькими способами это можно сделать (вариант, в котором самолеты вообще не летают, тоже рассматривается)?

Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Второй тур. Старт-лига. 15 сентября 2011 г.

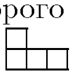
1. В некоторой куче настоящих монет больше, чем фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково. Любая фальшивая монета отличается по весу от настоящей (веса фальшивых монет могут быть различны). Можно сравнить вес любых двух монет при помощи чашечных весов, владелец которых после каждого взвешивания забирает себе в качестве арендной платы любую (выбранную им) монету из только что взвешенных. Верно ли, что можно выделить хотя бы одну настоящую монету и оставить ее себе?

2. Дан остроугольный равнобедренный треугольник ABC с вершиной C. Пусть A' – основание высоты, опущенной из вершины A. Оказалось, что $CA' = \frac{1}{2}AB$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

3. Дано восемь красных и по четыре синих и зеленых шара. Сколько существует способов выложить их в ряд так, чтобы одноцветные шары не стояли рядом?

4. Даны вещественные числа $a, b, c, d > 0$ и $e, f, g, h < 0$. Докажите, что все неравенства $ae + bc > 0$, $ef + cg > 0$, $fd + gh > 0$, $da + hb > 0$ не могут выполняться одновременно.

5. Известно, что сумма кубов трех натуральных чисел может быть кубом натурального числа (например, $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$). А существуют ли 2011 попарно различных натуральных чисел таких, что сумма их кубов равна кубу некоторого натурального числа?

6. На доске 12×12 стоит один корабль в виде  (располагаться по клеткам он может любым способом). Какое наименьшее количество выстрелов нужно сделать по клеткам доски, чтобы заведомо попасть в корабль?

7. Сумма четырех натуральных чисел a, b, c, d – простое число p. Докажите, что $ab - cd$ не делится на p.

8. Числа x_k при натуральных k заданы равенством $x_k = 2^k - k$. Найдите все натуральные n, для которых сумма $1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ является степенью двойки с натуральным показателем.