

1. Найдите геометрическое место точки O внутри правильного треугольника ABC такой, что $AO^2 + BO^2 = CO^2$. Опишите его и изобразите на чертеже.
2. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Известно, что для любого вещественного x существует вещественное y такое, что $f(y) = f(x) + y$. Найдите наибольшее возможное значение a .
3. Укажите какую-нибудь тройку рациональных ненулевых различных чисел a, b и c таких, что $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + a$. Ответ подтвердите выкладками.
4. На сторонах AB и AD единичного квадрата $ABCD$ взяты точки E и G , а внутри квадрата – точка F , при этом $AEFG$ также квадрат. Оказалось, что прямые BF, CG и DE пересекаются в одной точке. Найдите длину стороны квадрата $AEFG$.
5. Найдите три трехзначных числа, для записи которых использовано девять различных цифр, при этом произведение этих трёх чисел оканчивается пятью нулями и является минимально возможным.
6. Натуральные числа a и b ($a \leq b$) таковы, что для любых действительных чисел x и y , удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq y \leq b$, выполнено неравенство $a \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq b$.
Найдите все такие пары чисел a и b .
7. Сколько существует 225-значных чисел с суммой цифр 2017? Ответ дать в максимально упрощённом комбинаторном виде.
8. Какое наибольшее количество ферзей можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый ферзь бил не более двух других ферзей? Приведите ответ и пример.
9. Сколько существует пар натуральных чисел m и n ($m \leq n$), что числа $\frac{m^2 + 2n}{n^2 - 2m}$ и $\frac{n^2 + 2m}{m^2 - 2n}$ – целые?
10. Найдите наименьшее десятизначное число из различных цифр, делящееся на 11.
11. Поверхность куба $11 \times 11 \times 11$ разбита на клетки 1×1 . Муравей бежит по диагоналям клеток, нигде не поворачивая назад. Он не может бывать внутри одной клетки более одного раза, но может несколько раз проходить одну вершину. Какое наибольшее количество центров клеток мог посетить муравей?
12. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \geq xy$.
13. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E . Известно, что $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60^\circ$, $AE = 6$. Найдите площадь треугольника ABC .
14. Прямоугольник 4×100 разбит на доминошки (прямоугольники 1×2). Какое наименьшее количество точек может оказаться вершинами доминошек?
15. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 3, 4 и 5. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.
16. На доске написано натуральное число. Первую цифру сложили со второй, вторую с третьей, и так далее, предпоследнюю цифру сложили с последней, после чего эти числа выписали в строчку без пробелов, сохраняя порядок. С полученным числом проделали такую же операцию, и так далее (например, из 1568 получается 61114, а из него, в свою очередь, 7225). Найдите наименьшее число, из которого такими операциями нельзя получить однозначное число.