

XVI ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР
Лицей «Сириус»

Первая Старт-лига. 3 тур. 06.10.2021

1. В ряд стоит 2021 стул, на которые рассадили 673 человека так, чтобы никакие двое не сидели рядом. Какое наибольшее количество людей гарантированно можно ещё посадить так, чтобы опять никакие двое не сидели рядом?
2. Перед Совой и Иа-Иа стоит 20 горшочков с желудями: в первом — один жёлудь, во втором — два, . . . , в двадцатом — 20 жёлудей. Они договорились брать жёлуди по очереди: за один раз можно взять один жёлудь из любого горшочка. Причём, если кто-то берёт последний жёлудь горшочка, то он забирает пустой горшочек себе. Первый жёлудь берёт Сова. Какое наибольшее количество горшочков сможет получить Иа-Иа, как бы ни старалась Сова ему помешать?
3. Внутри n -угольника ($n \geq 3$) выбрали точку и соединили со всеми вершинами отрезками, полностью лежащими внутри многоугольника. Таким образом, он оказался разбит на n треугольников. Оказалось, что все они равнобедренные. При каких n можно утверждать, что выбранная точка была равноудалена от всех вершин многоугольника?
4. Робинзон Крузо попал на остров рыцарей, лжецов и Пятниц. Робинзон в один из дней недели, который известен всем, встретил местного жителя и захотел узнать, является ли тот Пятницей. Несколько дней подряд, начиная с этого дня, Робинзон задаёт этому жителю только один вопрос: «Какой сегодня день?» В ответ рыцарь ему всегда скажет правду, лжец солжёт. У Пятницы же пять «пятниц» на неделе (в том числе одна настоящая), которые не меняются от недели к неделе. В каждую из своих пяти «пятниц» Пятница на вопрос Робинзона ответит: «Пятница!», а в два других дня недели скажет правду. Какое наименьшее число дней Робинзон должен задавать вопросы, чтобы понять является ли повстречавшийся ему туземец Пятницей?
5. Можно ли число $\frac{4}{7}$ представить в виде произведения нескольких (не более 6) дробей с натуральными числителями и знаменателями так, чтобы сумма этих дробей была равна 7?
6. Незнайка утверждает, что существует ровно один клетчатый прямоугольник, в котором «доминошку» 1×2 можно разместить ровно 2021 способом. Прав ли Незнайка? («Доминошку» можно поворачивать, способы отличаются друг от друга положением «доминошки».)
7. В фестивале народной песни, прошедшем в два дня, участвовало несколько участников, которые выходили на сцену дуэтами. Никакой участник не выступал в один день дважды. Для каждого двух участников либо они выступали вместе, либо есть участник, с которым они выступали оба. Какое максимальное число участников могло быть на фестивале?
8. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Отметили точки D и E так, что:
 - $\angle CAD = \angle BCE = 90^\circ$,
 - $AD = CE$,
 - точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC ,
 - точки A и E лежат по разные стороны от прямой BC .Докажите, что из отрезков BD , AE и BC можно сложить треугольник.

XVI ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР
Лицей «Сириус»

Высшая Старт-лига. 3 тур. 06.10.2021

1. Для всех натуральных a, b, c докажите неравенство

$$\text{НОК}(a, bc) \geq \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, c).$$

2. Перед Совой и Иа-Иа стоит $n \geq 10$ горшочков с желудями: в первом — один жёлудь, во втором — два, ..., в последнем — n жёлудей. Они договорились брать жёлуди по очереди: за один раз можно взять один жёлудь из любого горшочка. Причём, если кто-то берёт последний жёлудь горшочка, то он забирает пустой горшочек себе. Первый жёлудь берёт Сова. Какое наибольшее количество горшочков сможет получить Иа-Иа, как бы ни старалась Сова ему помешать?
3. Внутри n -угольника ($n \geq 3$) выбрали точку и соединили со всеми вершинами отрезками, полностью лежащими внутри многоугольника. Таким образом, он оказался разбит на n треугольников. Оказалось, что все они равнобедренные. При каких n можно утверждать, что выбранная точка была равноудалена от всех вершин многоугольника?
4. Робинзон Крузо попал на остров рыцарей, лжецов и Пятниц. Робинзон в один из дней недели, который известен всем, встретил местного жителя и захотел узнать, является ли тот Пятницей. Несколько дней подряд, начиная с этого дня, Робинзон задаёт этому жителю только один вопрос: «Какой сегодня день?» В ответ рыцарь ему всегда скажет правду, лжец солжёт. У Пятницы же пять «пятниц» на неделе (в том числе одна настоящая), которые не меняются от недели к неделе. В каждую из своих пяти «пятниц» Пятница на вопрос Робинзона ответит: «Пятница!», а в два других дня недели скажет правду. Какое наименьшее число дней Робинзон должен задавать вопросы, чтобы понять является ли повстречавшийся ему туземец Пятницей?
5. Можно ли число $\frac{4}{7}$ представить в виде произведения нескольких (не более 6) дробей с натуральными числителями и знаменателями, так чтобы сумма этих дробей была равна 7?
6. Незнайка утверждает, что существует ровно один клетчатый прямоугольник, в котором «доминошку» 1×2 можно разместить ровно 2021 способом. Прав ли Незнайка? («*Доминошку*» можно поворачивать, способы отличаются друг от друга положением «доминошки».)
7. В гостиничном номере есть несколько ламп, некоторые из которых включены, и 200 выключателей. Каждый выключатель соединён с несколькими лампами, и при нажатии на него состояния всех этих ламп изменяются (то есть выключенные лампы включаются, а включенные выключаются). Известно, что с каждой лампой соединены ровно 100 выключателей. Администратор гарантирует, что можно нажать на какие-то выключатели и все лампы включатся. Докажите, что можно добиться этого, сделав не более 100 нажатий.
8. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Отметили точки D и E так, что:
- $\angle CAD = \angle BCE = 90^\circ$,
 - $AD = CE$,
 - точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC ,
 - точки A и E лежат по разные стороны от прямой BC .
- Докажите, что из отрезков BD , AE и BC можно сложить треугольник.