

Четырнадцатый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12–20.09.2019

Блиц-бой. 13 сентября 2022 г.

1. В клетках квадрата 5×5 расставлены числа так, что числа в каждой строке и в каждом столбце образуют арифметическую прогрессию (в том порядке, в котором они стоят в таблице). В левом нижнем углу стоит 0, в третьей клетке четвёртой строки стоит 103, в пятой клетке третьей строки стоит 186, во второй клетке второй строки стоит 74. Какое число стоит в четвёртой клетке первой строки?

2. О многочлене $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ известно, что $P(1) = 10$, $P(2) = 20$ и $P(3) = 30$. Найдите $P(12) + P(-8)$.

3. a и b – корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Найдите $a^{13} + b^{13}$.

4. Натуральные числа a , b и c таковы, что $4^a \cdot 5^b \cdot 6^c = 8^8 \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$. Найдите a , b и c .

5. 10 точек делят окружность на 10 равных дуг. Сколькими способами можно разбить эти точки на 5 пар и провести отрезки, соединяющие точки в парах, так, чтобы среди проведённых отрезков была ровно одна пара пересекающихся?

6. Точки M , N , P и Q – середины сторон AB , BC , CD и DA четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Прямые AP и BQ пересекаются в точке E , прямые BQ и CM пересекаются в точке F , прямые CM и DN пересекаются в точке G , прямые DN и AP пересекаются в точке H . Сумма площадей треугольников AEQ , BFM , CGN и DHP равна 20. Чему может быть равна площадь четырёхугольника $EFGH$ (укажите все возможные значения)?

7. По кругу стоят 20 точек, занумерованные по часовой стрелке числами от 1 до 20. Каждые две точки, номера которых отличаются на простое число, соединены отрезком. Сколько треугольников с вершинами в исходных точках образуют эти отрезки?

8. Окружность, касающаяся сторон DA , AB и BC параллелограмма $ABCD$ с острым углом A , пересекает его диагональ AC в точках P и Q (P лежит между A и Q). Известно, что $AP = 3$, $PQ = 9$ и $QC = 16$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.