

Старт-лига Высшая. Второй тур. 21.09.2023.

1. Назовём число *красивым*, если оно получается выписыванием друг за другом слева направо по возрастанию пяти последовательных трёхзначных чисел. Сколько красивых чисел делятся на 23?

2. На стол положили зелёную квадратную салфетку, а затем положили двадцать белых салфеток такой же формы и размера. Зелёная салфетка оказалась полностью накрыта. Обязательно ли найдется белая салфетка, которую можно убрать, и зелёная по-прежнему будет полностью накрыта?

3. Найдите все пары действительных чисел  $a$ ,  $b$ , для которых выполнено неравенство

$$5a^2 + 5b^2 + 6ab - 4b - 4a + 1 \leq 0.$$

4. Музей в виде квадрата  $6 \times 6$  состоит из 36 залов  $1 \times 1$ . Каждые два зала, соседствующие по стороне, соединены дверью. В каждом зале висит несколько картин. При любой прогулке по 11 залам из левого нижнего угла в правый верхний угол, посетитель увидит одно и то же количество картин. Аналогично, при любой прогулке по 11 залам из левого верхнего угла в правый нижний угол, посетитель увидит одно и то же количество картин. Могло ли в музее оказаться ровно 1000 картин?

5. Перед присяжными лежат 40 гирек, на 20 из них написано «10 г», на 20 остальных — «11 г». Присяжным известно лишь то, что каждая гирька весит либо 10 г, либо 11 г, а адвокат знает, что все надписи верные. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь адвокат может убедить присяжных в правильности всех надписей?

6. Дан треугольник  $ABC$ . Известно, что для любой точки  $P$  строго внутри  $ABC$  из отрезков  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  можно составить треугольник. Докажите, что треугольник  $ABC$  равносторонний.

7. Шесть команд играют однокруговой турнир за пять туров. В первом туре команды забили разное число голов. В каждом следующем туре каждая команда забивала столько голов, сколько её очередной соперник забил в предыдущем туре. Какое наименьшее число голов могла забить одна команда за весь турнир?

8. В записи 101-значного числа есть только две цифры: 1 и 2. Докажите, что можно вычеркнуть одну цифру так, чтобы получившееся 100-значное число делилось на 11.

Старт-лига Первая. Второй тур. 21.09.2023.

1. Назовём число *красивым*, если оно получается выписыванием друг за другом слева направо по возрастанию четырёх последовательных двузначных чисел. Сколько красивых чисел делятся на 19?

2. Найдутся ли такие натуральные числа  $a$  и  $b$ , что все дроби

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a+1}{b}, \quad \frac{a}{b+1}, \quad \frac{a+1}{b+1}$$

сократимы?

3. Незнайка разрезал прямоугольник  $6 \times 10$  на фигуры пентамино, сделав ножницами разрезы суммарной длины 50. Какое наибольшее количество различных пентамино у него могло получиться?

4. Медианой выпуклого пятиугольника  $ABCDE$  назовём отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны, то есть вершину  $A$  с серединой стороны  $CD$ , вершину  $B$  с серединой стороны  $DE$  и т. д. Известно, что 4 из 5 таких медиан перпендикулярны соответствующим сторонам, к которым проведены. Обязательно ли и пятая медиана перпендикулярна стороне, к которой проведена?

5. Найдите все пары действительных чисел  $a, b$ , для которых выполнено неравенство

$$5a^2 + 5b^2 + 6ab - 4b - 4a + 1 \leq 0.$$

6. Музей в виде квадрата  $6 \times 6$  состоит из 36 залов  $1 \times 1$ . Каждые два зала, соседствующие по стороне, соединены дверью. В каждом зале висит несколько картин. При любой прогулке по 11 залам из левого нижнего угла в правый верхний угол, посетитель увидит одно и то же количество картин. Аналогично, при любой прогулке по 11 залам из левого верхнего угла в правый нижний угол, посетитель увидит одно и то же количество картин. Могло ли в музее оказаться ровно 1000 картин?

7. Перед присяжными лежат 40 гирек, на 20 из них написано «10 г», на 20 остальных — «11 г». Присяжным известно лишь то, что каждая гирька весит либо 10 г, либо 11 г, а адвокат знает, что все надписи верные. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь адвокат может убедить присяжных в правильности всех надписей?

8. Шесть команд играют однокруговой турнир за пять туров. В первом туре команды забили разное число голов. В каждом следующем туре каждая команда забивала столько голов, сколько её очередной соперник забил в предыдущем туре. Какое наименьшее число голов могла забить одна команда за весь турнир?