

Старт-лига Высшая. ФИНАЛ. 25.09.2023.

1. На доске написано число 123456. За один ход нужно вычесть из этого числа сумму любых трёх его цифр и результат записать вместо исходного числа. Петя и Вася делают это по очереди, начинает Петя. Выигрывает тот, кто получит число меньшее нуля. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

2. Дан остроугольный треугольник ABC , $\angle B = 45^\circ$. На сторонах AB и BC отмечены соответственно точки D и E так, что $AC = CD = AE$. Докажите, что описанная окружность треугольника ABC пересекает на прямых AE и CD равные отрезки.

3. Верно ли, что для любой пары натуральных чисел $a, b \geq 2$ найдётся такое простое число p , что $(p - a)! + b$ кратно p ?

4. Есть 100 головок сыра. Одним разрезом можно любой кусок разделить на две части. Каким минимальным количеством разрезов можно обойтись, чтобы получившиеся куски можно было разбить на три кучки равного веса, в которых поровну кусков?

5. Незнайка поставил на каждую клетку доски ладью и раскрасил их в 32 цвета по 2 штуки в каждый цвет. Имеет ли Знайка гарантированную возможность оставить на доске только 8 ладей различных цветов, чтобы они не били друг друга?

6. Существуют ли такие тройки натуральных чисел (x, y, z) , для которых число $(x - 2)(y - 2)(z - 2) + 12$ является простым делителем числа $x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 2017$?

7. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC . На сторонах AB и AC выбраны точки E и F . Пусть K — точка пересечения BF и CE , а L выбраны так, что CL параллельно AB и BL параллельно CE . Пусть N — точка пересечения AM и CL . Покажите, что KN параллелен FL .

8. На плоскости в красный цвет окрашено $8N^3$ узлов решётки. В каждой красной точке P написано общее количество красных точек на вертикальной и горизонтальной прямых, проходящих через P . Докажите, что существует число, которое записывается не менее $N + 1$ раз.