

1. Даны натуральные числа k и n , причём $n > 2k$. Имеются n кучек, в каждой из которых лежит ровно k камней. За один ход разрешается выбрать три различные кучки и убрать из них суммарно ровно n камней (эти n камней могут быть распределены по трём кучкам как угодно). При каких парах (k, n) можно за несколько ходов убрать все камни?
2. На клетчатой доске 2026×2026 стоит не менее десяти фишек, в каждой клетке стоит не более одной фишки. Для каждой фишки посчитали число фишек a в её столбце, **включая** её саму, и число фишек b в её строке, **не включая** её саму; затем на эту фишку написали числа a и b , сначала выписав наименьшее из них, а затем наибольшее. Обязательно ли найдутся две фишки, на которых написана одна и та же пара чисел?
3. Для положительных действительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a}{1+b^2+c^2} + \frac{b}{1+c^2+a^2} + \frac{c}{1+a^2+b^2} > \frac{a+b+c}{1+ab+bc+ca}.$$

4. Натуральные числа a и b таковы, что оба числа $\frac{b^{21}}{a^{2026}}$ и $\frac{a^{193}}{b^2}$ целые и больше единицы. Найдите наименьшее возможное значение $a+b$.
5. При каком наибольшем n существуют такие n попарно различных натуральных чисел, что сумма любых двух из них является факториалом некоторого натурального числа?
6. На сторонах AB , AC , BC треугольника ABC выбраны соответственно точки X , Y , Z так, что четырёхугольник $XAYZ$ является параллелограммом. Окружность, проходящая через Y и Z и касающаяся прямой BC в точке Z , пересекает прямую XU в двух различных точках Y и T . Докажите, что точки T, Y, C, B лежат на одной окружности.
7. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке H . Пусть X — точка пересечения прямой B_1C_1 с описанной окружностью треугольника AHC , лежащая вне треугольника ABC . Описанные окружности треугольников XB_1H и AHB вторично пересекаются в точке T , отличной от H . Докажите, что T лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.
8. Длина стороны равностороннего треугольника — натуральное число, не делящееся ни на 2, ни на 3. Может ли оказаться, что этот треугольник можно разрезать на равносторонние треугольники, длина стороны каждого из которых равна либо 2, либо 3?