

Двадцать первый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 20–28.09.2026

Высшая юниорская лига. 1 тур. 22.09.2026

1. Дано натуральное число $n \geq 2$. Вещественные числа a и b таковы, что $a(b-1)^n + b(a-1)^n = 0$. Найдите наибольшее возможное значение ab .

2. На доске записаны числа $1, 2, \dots, n$. За один ход разрешается выбрать два числа, разность которых также записана на доске, и стереть эту разность. Например, если на доске записаны числа 3, 6, 11, 17, то можно стереть 3, так как $6 - 3 = 3$; можно стереть 6, так как $17 - 11 = 6$; можно стереть 11, так как $17 - 6 = 11$. При каких натуральных n можно последовательностью таких ходов добиться того, чтобы на доске осталось ровно одно число?

3. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ – перестановка чисел $1, 2, \dots, 2026$. В стране есть 2026 городов, пронумерованных числами от 1 до 2026. Односторонний маршрут из города i в город j существует тогда и только тогда, когда $i < j$ или $a_i < a_j$. Известно, что из любого города в любой другой город можно добраться с помощью последовательности этих маршрутов. Найдите минимально возможное значение выражения $\sum_{i=1}^{2026} |a_i - i|$.

4. Дан треугольник ABC с прямым углом A . Постройте на его периметре точку, для которой сумма расстояний до вершин этого треугольника принимает минимальное возможное значение.

5. Найдите все пары натуральных чисел $x \geq y$, для которых $x^2 + 2y$ делится на $y^2 - 2x$ и $y^2 + 2x$ делится на $x^2 - 2y$.

6. Во всех клетках таблицы 4×99 стоят неотрицательные числа. Известно, что сумма чисел в любых четырёх клетках, образующих S-тетрамино, не меньше 1. Найдите минимально возможное значение суммы всех чисел в таблице. (S-тетрамино можно поворачивать и переворачивать.)

7. Докажите, что не существует бесконечной последовательности целых чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ в которой каждое целое число встречается ровно один раз и $|a_{n+2} - a_{n+1}| \geq 2|a_{n+1} - a_n|$ для всех натуральных n .

8. Множество рациональных чисел S называется инклюзивным, если 0 не входит в S , и для любых (не обязательно различных) элементов x, y и z из S число $xy + z$ также входит в S . Найдите все рациональные числа a , для которых существует инклюзивное множество, содержащее a .