

Двадцать первый Южный математический турнир
ВДЦ “Орлёнок”, 20–28.09.2026
Юниор-лига 2. 1 тур. 22.09.2026

1. Найдите все пары вещественных чисел a и b , при которых выражение

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) - 2(a + 1)(3b + 1)$$

принимает наименьшее возможное значение.

2. На доске записаны числа $1, 2, \dots, 2027$. За один ход разрешается выбрать два числа, разность которых также записана на доске, и стереть эту разность. Например, если на доске записаны числа $3, 6, 11, 17$, то можно стереть 3 , так как $6 - 3 = 3$; можно стереть 6 , так как $17 - 11 = 6$; можно стереть 11 , так как $17 - 6 = 11$. Можно ли сделать так, чтобы после нескольких таких ходов на доске осталось только одно число?

3. В некоторых клетках таблицы $n \times n$ стоит по фишке (всего фишек хотя бы две). Для каждой фишки посчитали произведение количества фишек в её строке и количества фишек в её столбце. Докажите, что среди посчитанных произведений найдутся два равных.

4. Внутри треугольника ABC взята точка P . В треугольники APB , BPC и CPA вписаны окружности. Точки касания окружностей разделили стороны треугольника на отрезки, которые через один покрашены в красный и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих.

5. Даны два 2026-угольника $A_1, A_2, \dots, A_{2026}$ и $B_1, B_2, \dots, B_{2026}$. Проведены все их стороны, а также отрезки $A_i B_i$ для $i = 1, 2, \dots, 2026$. Сколько существует замкнутых маршрутов по проведённым рёбрам, которые начинаются в A_1 , проходят через каждую из остальных 4051 вершин ровно один раз и возвращаются в A_1 ? Два противоположных направления одного маршрута считаются различными.

6. Дан треугольник ABC с прямым углом A . Постройте на его периметре точку, для которой сумма расстояний до вершин этого треугольника принимает минимальное возможное значение.

7. Петя хочет написать в вершинах 21-угольника какие-то числа, а на каждом ребре между двумя вершинами — произведение чисел в этих вершинах. Может ли он добиться того, чтобы на ребрах были написаны числа от 1 до 21 в некотором порядке?

8. Первый игрок загадывает натуральное число $n \leq 10^{10}$. Второй игрок за одну попытку называет произвольное натуральное число m . Если $m = n$, второй игрок выигрывает. Если $m \neq n$, то число n заменяется на сумму цифр числа nm , после чего игра продолжается по тем же правилам. Какое наименьшее число попыток достаточно второму игроку, чтобы гарантированно выиграть?